—————————

ESTE DUMNEZEU MATEMATICIAN?

Mario Livio este astrofizician şi lucrează la Space Telescope Science Institute din Baltimore. Munca sa de cercetare îmbrăţişează un domeniu vast din astrofizică şi cosmologie. A publicat peste patru sute de articole de specialitate, dar ţine frecvent conferinţe pe teme ştiinţifice adresate publicului larg. Este autorul unor cărţi de mare succes – *Secţiunea de aur, Ecuaţia care nu a putut fi rezolvată* şi *Gafe strălucite* –, apărute şi în traducere românească la Editura Humanitas.

MARIO LIVIO
ESTE DUMNEZEU MATEMATICIAN?
Traducere din engleză de
ANCA FLORESCU-MITCHELL
HUMANITAS
BUCUREŞTI
Redactor: Vlad Zografi Coperta: Angela Rotaru Tehnoredactor: Manuela Măxineanu Corectori: Iuliana Pop, Patricia Rădulescu DTP: Mihaela Biscărean, Dan Dulgheru
Mario Livio
Is God A Mathematician?
Copyright © 22009 by Mario Livio Originally published by Simon & Schuster, Inc.
All rights reserved.
Ilustraţia copertei: William Blake, *Dumnezeu Arhitectul* (detaliu)
© HUMANITAS, 2018, pentru prezenta versiune românească
ISBN 978 – 973 – 50 – 5971 – 2 (pdf)
EDITURA HUMANITAS
Piaţa Presei Libere 1, 013701 Bucureşti, România tel. 021/408 83 50, fax 021/408 83 51
www.humanitas.ro

Comenzi online: www.libhumanitas.ro Comenzi prin e-mail: vânzări libhumanitas.ro Comenzi telefonice: 021.311.23.30

Pentru Sofie

Prefaţă

9

Dacă lucrezi în cosmologie – studiul cosmosului în întregul lui – se întâmplă să primeşti săptămânal câte o scrisoare, un e-mail sau un fax din partea cuiva care vrea să-ţi prezinte propria *lui* teorie despre univers (ei, da, întotdeauna e vorba de bărbaţi). Cea mai mare greşeală pe care o poţi face e să răspunzi politicos că ai vrea să afli mai multe. Consecinţa imediată e un puhoi de mesaje. Cum poţi împiedica asaltul? O tactică pe care am găsit-o eficientă (lăsând la o parte impoliteţea de a nu răspunde deloc) e să subliniezi un adevăr simplu: atâta vreme cât o teorie nu e formulată precis în limbaj matematic, e imposibil să-i evaluăm relevanţa. Acest răspuns îi descurajează pe cei mai mulţi cosmologi amatori. Realitatea este că, fără matematică, cosmologii din zilele noastre n-ar putea face nici cel mai mic pas în încercarea de a înţelege legile naturii. Matematica oferă structura de rezistenţă care susţine orice teorie despre univers. Lucrul e cu atât mai surprinzător dacă ne dăm seama că însăşi natura matematicii nu este pe deplin lămurită. După cum spunea filosoful britanic Sir Michael Dummett: „Cele mai abstracte discipline intelectuale, filosofia şi matematica, provoacă aceeaşi perplexitate: *cu ce* se ocupă ele? Perplexitatea nu provine doar din ignoranţă: chiar şi specialiştilor din aceste domenii le e greu să răspundă la întrebare”.

În această carte încerc cu modestie să lămuresc unele aspecte ale esenţei matematicii, precum şi natura relaţiei dintre matematică şi lumea pe care o observăm. Desigur, cartea nu se vrea o istorie cuprinzătoare a matematicii, ci urmăreşte cronologic evoluţia unor concepte importante pentru înţelegerea rolului matematicii în imaginea pe care ne-o facem despre

cosmos.

Mulţi au contribuit, direct şi indirect, timp îndelungat, la ideile prezentate în această carte. Aş vrea să mulţumesc lui Sir Michael Atiyah, Gia Dvali, Freeman Dyson, Hillel Gauchman, David Gross, Sir Roger Penrose, Lord Martin Rees, Rămân Sundrum, Max Tegmark, Steven Weinberg şi Stephen Wolfram, pentru schimburi de idei foarte folositoare. Îi sunt îndatorat lui Dorothy Morgenstern Thomas pentru permisiunea de a folosi textul complet al relatării lui Oscar Morgenstern despre întâlnirea lui Kurt Godel cu cei de la Serviciul de Imigraţie şi Naturalizare al Statelor Unite. William Christens-Barry, Keith Knox, Roger Easton şi, în special, Will Noel au avut amabilitatea să-mi dea explicaţii detaliate în legătură cu eforturile depuse în descifrarea Palimpsestului lui Arhimede. Mulţumiri aparte i se cuvin Laurei Garbolino pentru că mi-a oferit materiale esenţiale şi documente rare privind istoria matematicii. Mulţumesc, de asemenea, departamentelor colecţiilor speciale de la Universitatea John Hopkins, Universitatea din Chicago şi Biblioteca Naţională a Franţei, pentru că mi-au pus la dispoziţie câteva manuscrise rare.

Îi sunt recunoscător lui Stefano Casertano pentru ajutorul acordat la traducerile dificile din latină, precum şi doamnelor Elizabeth Fraser şi Jill Lagerstrom pentru inestimabilul sprijin bibliografic şi lingvistic (însoţit întotdeauna de un zâmbet).

Mulţumiri deosebite i se cuvin lui Sharon Toolan pentru contribuţia profesionistă la pregătirea manuscrisului pentru tipar şi doamnelor Ann Field, Krista Wildt şi Stacey Benn pentru întocmirea anumitor figuri.

Orice autor (sau autoare) ar trebui să se considere norocos (sau norocoasă) dacă s-ar bucura din partea soţiei (sau soţului) de sprijinul şi de răbdarea de care am beneficiat eu din partea soţiei mele, Sofie, în cursul îndelungatei perioade în care am scris această carte.

În fine, aş vrea să-i mulţumesc agentei mele, Susan Rabiner, fără de a cărei încurajare această carte n-ar fi

existat. Îi sunt, de asemenea, profund îndatorat editorului meu, Bob Bender, pentru lectura atentă a manuscrisului şi observaţiile pătrunzătoare, Johannei Li pentru sprijinul nepreţuit la apariţia cărţii, Lorettei Danner şi lui Amy Ryan pentru tehnoredactare, Victoriei Meyer şi lui Katie Grinch pentru promovarea cărţii, precum şi întregii echipe de producţie şi marketing de la Editura Simon & Schuster pentru munca ei susţinută.

Capitolul 1
Misterul

Cu câţiva ani în urmă am ţinut o conferinţă la Universitatea Cornell. Pe una dintre imaginile proiectate de mine se putea citi: „Este Dumnezeu matematician?” Îndată ce a apărut imaginea, l-am auzit pe un student din primul rând rostind nervos: „Oh, Doamne, sper că nu!”

Întrebarea mea retorică nu era o încercare filosofică de a-l defini pe Dumnezeu în faţa publicului, nicio stratagemă pentru a-i intimida pe cei ce suferă de fobia matematicii. Eu prezentam pur şi simplu un mister cu care s-au luptat vreme de secole cele mai originale minţi – vădita omniprezenţă şi omnipotenţă a matematicii. Acestea sunt genul de atribute asociate de regulă doar cu divinitatea. După cum spunea fizicianul britanic James Jeans (1877 – 1946): „Universul pare să fi fost conceput de un matematician pur”. Matematica pare să fie uimitor de eficientă în descrierea şi explicarea cosmosului în întregul lui, ba chiar şi a unora dintre cele mai haotice acţiuni umane.

Fie că fizicienii încearcă să formuleze teorii ale universului, analiştii bursieri se scarpină în cap pentru a prezice următoarea prăbuşire a bursei, neurobiologii construiesc modele de funcţionare a creierului sau statisticienii serviciilor secrete militare încearcă să optimizeze alocarea resurselor, cu toţii folosesc matematica. Mai mult, deşi aplică formalisme provenind din diferite ramuri ale matematicii, ei se referă totuşi la aceeaşi matematică globală şi coerentă. Ce anume îi conferă matematicii asemenea puteri incredibile? Sau, aşa

cum se mira odată Einstein: „Cum e posibil ca matematica, produs al gândirii omeneşti *independent de experienţă* [s. m.], să se potrivească atât de bine cu obiectele realităţii fizice?” Acest sentiment de totală uimire nu e nou. Unii filosofi ai Greciei antice, mai cu seamă Pitagora şi Platon, priveau cu veneraţie capacitatea matematicii de a modela şi dirija universul, în timp ea nu poate fi modificată, controlată sau influenţată de oameni. Filosoful politic englez Thomas Hobbes (1588 – 1679) nu-şi putea nici el ascunde admiraţia. În *Leviatan,* impresionantă prezentare a ceea ce Hobbes considera a fi temelia societăţii şi a guvernării, acesta scoate în evidenţă geometria ca paradigmă a argumentării raţionale:

Din moment ce adevărul constă în ordonarea corectă a termenilor în afirmaţiile noastre, un om care caută adevărul exact trebuie să-şi amintească ce înseamnă fiecare termen pe care îl foloseşte şi să-l aşeze la locul lui; altminteri, se va încurca în cuvinte, ca o pasăre prinsă între rămurele lipicioase; cu cât se zbate mai tare, cu atât se lipeşte mai rău. Prin urmare, în geometrie (singura ştiinţă pe care Dumnezeu a binevoit s-o dăruiască omenirii până acum), oamenii încep prin a stabili sensul cuvintelor lor; această stabilire a sensului poartă pentru ei numele de definiţii, pe care le aşază la începutul calculelor.

Milenii de impresionantă cercetare matematică şi de speculaţie filosofică erudită au adus relativ puţină lumină asupra misterului forţei matematicii. Într-un fel, misterul s-a adâncit şi mai mult. De pildă, Roger Penrose, renumitul specialist în fizică matematică de la Oxford, percepe acum nu un unic, ci un triplu mister. Penrose identifică trei „lumi” diferite: *lumea percepţiilor noastre conştiente, lumea fizică* şi *lumea platoniciană a formelor matematice.* Prima lume este tărâmul tuturor imaginilor noastre mentale – cum percepem chipurile copiilor noştri, cum ne bucurăm de un minunat apus de soare sau cum reacţionăm la imaginile cumplite ale războiului. Aceasta e totodată lumea care cuprinde dragostea, gelozia şi prejudecăţile, precum şi perceperea muzicii, a aromei mâncării şi a

spaimei. Cea de-a doua lume este cea pe care o numim de regulă realitate fizică. Florile, tabletele de aspirină, norii albi şi avioanele cu reacţie aparţin acestei lumi, la fel şi galaxiile, atomii, inimile de babuin şi creierele oamenilor. Lumea platonicianã a formelor matematice, care, pentru Penrose, are o realitate veritabilă, comparabilă cu cea a lumii fizice şi a celei mentale, este patria matematicii. Acolo veţi întâlni numerele naturale 1, 2, 3, 4… toate formele şi teoremele geometriei euclidiene, legile newtoniene ale mişcării, teoria corzilor, teoria catastrofelor şi modelele matematice pentru comportamentul bursei. Iată şi cele trei mistere, după Penrose. Mai întâi, lumea realităţii fizice pare să asculte de legi care rezidă de fapt în lumea formelor matematice. Asta l-a uimit pe Einstein. Eugen Wigner (1902 – 1995), laureat al Premiului Nobel pentru fizică, era şi el pus în încurcătură:

Miracolul faptului că limbajul matematicii e potrivit pentru a formula legile fizicii este un dar minunat pe care nici nu-l înţelegem, nici nu-l meritãm. Ar trebui să fim recunoscători pentru acest dar, să sperăm că el va rămâne valabil în cercetările viitoare şi că se va extinde, cu avantajele şi dezavantajele sale, spre bucuria, dar şi spre nedumerirea noastră, către ramuri vaste ale cunoaşterii.

În al doilea rând, înseşi minţile care percep – sălaşul percepţiilor noastre conştiente – au reuşit cumva să apară din lumea fizică. Cum s-a născut *mintea* din *materie*? Vom fi vreodată în stare să formulăm o teorie a activităţii conştiinţei care să fie la fel de coerentă şi convingătoare ca, de pildă, actuala teorie a electromagnetismului? În fine, cercul se închide în mod misterios. Acele minţi care percep au căpătat în chip miraculos acces la lumea matematică, descoperind sau creând un tezaur de forme şi concepte matematice abstracte.

Penrose nu oferă o explicaţie pentru niciunul dintre cele trei mistere, dar conchide laconic: „Fără îndoială că nu există cu adevărat trei lumi, ci *una,* a cărei adevărată natură încă nici n-am întrezărit-o”. Este o mărturisire mult

mai smerită decât răspunsul profesorului din piesa *Forty Years On* (scrisă de autorul englez Alan Bennett) la o întrebare oarecum asemănătoare:

Foster: Sunt puţin nelămurit în legătură cu Sfânta Treime, domnule.

Profesorul: Trei în unul, unul în trei, e foarte simplu. Dacă ai vreo îndoială, du-te la profesorul de matematică.

Misterul e însă şi mai adânc. Succesul matematicii în explicarea lumii înconjurătoare (succes pe care Wigner l-a numit „imprevizibila eficacitate a matematicii") are două aspecte, unul mai uimitor decât altul. În primul rând, există un aspect care ar putea fi numit „activ". Când fizicienii hoinăresc prin labirintul naturii, ei îşi luminează calea cu ajutorul matematicii – instrumentele pe care le folosesc şi le perfecţionează, modelele pe care le construiesc şi explicaţiile pe care le invocă, toate sunt de natură matematică. La prima vedere, acesta e un miracol în sine. Newton a observat căderea unui măr, Luna, mareele de pe plaje (nici măcar nu sunt sigur că le-a văzut pe acestea din urmă), nu ecuaţii matematice. El a reuşit însă cumva să extragă din toate aceste fenomene naturale legi matematice ale naturii, clare, concise şi incredibil de precise. La fel, atunci când fizicianul scoţian James Clerk Maxwell (1831 – 1879) a extins cadrul fizicii clasice pentru a include *toate* fenomenele electrice şi magnetice cunoscute la 1860, el a făcut-o cu numai patru ecuaţii matematice. Gândiţi-vă o clipă la acest lucru. Explicaţia pentru un ansamblu de rezultate experimentale în domeniul electromagnetismului şi al luminii, care fuseseră înainte prezentate în volume întregi, se reducea la patru ecuaţii succinte. Relativitatea generală a lui Einstein e şi mai uimitoare – este un exemplu perfect de teorie matematică extrem de precisă şi coerentă a ceva fundamental precum structura spaţiului şi timpului.

Dar există şi un aspect „pasiv" al misterioasei eficacităţi a matematicii, care e atât de surprinzător, încât aspectul „activ" păleşte prin comparaţie. Concepte şi relaţii explorate de matematicieni numai din raţiuni pure –

neavând nicio aplicaţie în minte – se dovedesc decenii (sau uneori secole) mai târziu a fi soluţii neaşteptate ale unor probleme ce provin din realitatea fizică! Cum e posibil aşa ceva? Să luăm exemplul oarecum amuzant al excentricului matematician britanic Godfrey Harold Hardy (1877 – 1947). Hardy era atât de mândru că se ocupa doar cu matematica pură, încât declara cu emfază: „Nicio cercetare de-a mea nu a adus şi nu va aduce, direct sau indirect, cea mai mică contribuţie la confortul lumii". Ei bine, s-a înşelat. Una dintre cercetările sale s-a reîncarnat în legea Hardy-Weinberg (numită după Hardy şi medicul german Wilhelm Weinberg (1862 – 1937)), un principiu fundamental folosit de geneticieni pentru a studia evoluţia populaţiilor. Simplu spus, legea Hardy-Weinberg afirmă că, dacă o populaţie numeroasă se împerechează absolut la întâmplare (iar migraţiile, mutaţiile şi selecţia nu intervin), atunci zestrea genetică rămâne constantă de la o generaţie la alta. Chiar şi aparent abstractele lucrări ale lui Hardy din *teoria numerelor* – studiul proprietăţilor numerelor naturale – şi-au găsit aplicaţii neaşteptate. În 1973, matematicianul britanic Clifford Cocks a folosit teoria numerelor pentru a face o descoperire în criptografie – crearea codurilor. Descoperirea lui Cocks a făcut să devină caducă o altă afirmaţie a lui Hardy. În faimoasa sa carte *Apologia unui matematician,* publicată în 1940, Hardy afirma: „Nimeni nu a descoperit vreun scop războinic care să fie servit de teoria numerelor". E limpede, Hardy se înşela din nou. Codurile au jucat un rol crucial în comunicaţiile militare. Aşa încât până şi Hardy, unul dintre cei mai vehemenţi critici ai matematicii aplicate, a fost „târât" (probabil zbătându-se şi urlând, dacă ar fi fost în viaţă) în crearea unor teorii matematice folositoare.

Dar acesta nu e decât vârful aisbergului. Kepler şi Newton au descoperit că planetele sistemului nostru solar urmează orbite în formă de elipsă – acele curbe studiate de matematicianul grec Menaihmos (pe la 350 î.Hr.) cu două milenii mai devreme. Noile tipuri de geometrie schiţate de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) într-o

conferinţă din 1854 devenită clasică s-au dovedit a fi exact instrumentele de care avea nevoie Einstein pentru a explica structura cosmosului. Un „limbaj” matematic numit teoria grupurilor, elaborat de prodigiosul tânăr Evariste Galois (1811 – 1832) pentru a determina solubilitatea ecuaţiilor algebrice, a devenit astăzi limbajul folosit de fizicieni, ingineri, lingvişti, chiar şi antropologi, pentru a descrie toate simetriile din lume. Mai mult, conceptul de modele de simetrie matematică a răsturnat, într-un fel, întregul proces ştiinţific. Timp de secole, calea către înţelegerea cosmosului pornea de la un ansamblu de fapte experimentale sau de observaţie, din care, prin încercări succesive, oamenii de ştiinţă încercau să formuleze legi generale ale naturii. Ideea era de a începe cu observaţii locale şi de a construi jocul de puzzle piesă cu piesă. În secolul XX, odată ce s-a înţeles că structura lumii subatomice se sprijină pe concepte matematice bine definite, fizicienii au început să procedeze în sens invers. Ei stabilesc *întâi* principiile de simetrie matematică, impunând apoi legilor naturii şi cărămizilor elementare ale materiei să asculte de anumite tipare, şi deduc legile generale din aceste condiţii. Cum ştie natura să asculte de aceste simetrii matematice abstracte?

În 1975, Mitch Feigenbaum, pe atunci tânăr fizician în Laboratorul Naţional de la Los Alamos, se juca cu calculatorul său de buzunar HP-65. El studia comportarea unei ecuaţii simple. A observat că un şir de numere care apăreau în calcule se apropia tot mai mult de 4, 699… Spre uimirea sa, examinând alte ecuaţii, apărea din nou acelaşi număr bizar. Feingenbaum a tras curând concluzia că descoperise ceva universal, care semnala cumva tranziţia de la ordine la haos, deşi nu avea nicio explicaţie pentru acest fapt. După cum era de aşteptat, fizicienii au fost la început sceptici. La urma urmelor, de ce ar trebui ca acelaşi număr să caracterizeze comportarea unor sisteme care păreau diferite? După şase luni de deliberări, prima lucrare a lui Feigenbaum pe această temă a fost respinsă. Nu peste mult timp însă, experimentele au arătat

că, atunci când e încălzit, heliul lichid se comportă exact aşa cum prezicea soluţia universală a lui Feigenbaum. Iar acesta nu era singurul sistem care se comporta astfel. Uimitorul număr al lui Feigenbaum a apărut în tranziţia de la curgerea ordonată a unui fluid la cea turbulentă, ba chiar şi în comportarea apei care picură dintr-un robinet.

Lista unor asemenea cazuri în care matematicienii „anticipează" nevoile diverselor discipline ale generaţiilor viitoare poate continua la nesfârşit. Unul dintre cele mai fascinante exemple ale misterioasei şi neaşteptatei interacţiuni între matematică şi lumea reală (fizică) e dat de povestea *teoriei nodurilor* – studiul matematic al nodurilor. Un nod matematic seamănă cu un nod obişnuit de pe o sfoară ale cărei capete sunt unite. Un nod matematic este deci o curbă închisă, fără capete libere. Ciudat lucru, impulsul principal pentru dezvoltarea teoriei matematice a nodurilor a provenit dintr-un model incorect al atomului, elaborat în secolul XIX. Odată ce modelul a fost abandonat – la numai două decenii după ce fusese conceput –, teoria nodurilor a continuat să evolueze ca ramură relativ obscură a matematicii pure. În chip uimitor, acest demers abstract şi-a găsit brusc o gamă largă de aplicaţii, de la structura moleculară a ADN-ului la teoria corzilor – încercarea de a uni lumea subatomică cu gravitaţia. Mă voi întoarce la această remarcabilă poveste în capitolul 8, pentru că istoria sa circulară este poate cea mai bună dovadă a faptului că ramuri ale matematicii se pot ivi din încercările de a explica realitatea fizică, se îndreaptă apoi către tărâmul abstract al matematicii, pentru a se întoarce până la urmă pe neaşteptate la originile lor.

Descoperire sau invenţie?

Chiar şi scurta prezentare de mai sus oferă deja dovezi copleşitoare că universul e guvernat de matematică sau, cel puţin, poate fi analizat folosind matematica. După cum voi arăta în această carte, multe dintre acţiunile umane, dacă nu toate, par să-şi aibă punctul de pornire în matematică, chiar şi acolo unde ne aşteptăm mai puţin. Să

examinăm, de pildă, un exemplu din lumea finanţelor – formula Black-Scholes de evaluare a preţului unei opţiuni (1973).[1]

Modelul Black-Scholes le-a adus creatorilor săi (Myron Scholes şi Robert Carhart Merton; Fisher Black a murit înainte ca premiul să fie decernat) Premiul Nobel pentru economie. Ecuaţia-cheie a modelului permite estimarea preţului opţiunilor (instrumente financiare care permit cumpărarea sau vânzarea unor acţiuni la o dată ulterioară, la un preţ dinainte stabilit). Aici intervine însă un fapt surprinzător. În centrul acestui model se află un fenomen studiat de fizicieni timp de decenii – mişcarea browniană, starea de agitaţie prezentată de mici particule cum sunt polenul aflat în suspensie în apă sau particulele de fum în aer. Apoi, ca şi cum acestea n-ar fi fost de ajuns, aceeaşi ecuaţie se aplică şi la mişcarea sutelor de mii de stele din aglomerările de stele. Nu e oare acest fapt, după cum se spune în *Alice în Ţara Minunilor,* „tot mai ciudat şi mai ciudat”? La urma urmelor, indiferent ce e cosmosul, afacerile şi finanţele sunt cu siguranţă lumi create de mintea omenească.

Sau să considerăm o problemă frecvent întâlnită de fabricanţii de panouri electronice şi de proiectanţii de calculatoare. Aceştia folosesc perforatoare cu laser pentru a face mii de găuri în plăci. Pentru a minimiza costurile, proiectanţii de calculatoare nu vor ca perforatoarele să se comporte ca nişte „turişti întâmplători”. Problema este de a afla cel mai scurt „tur” printre găuri, acela care vizitează fiecare poziţie a unei găuri o singură dată. S-a dovedit că matematicienii cercetaseră exact această problemă, cunoscută ca *problema comis-voiajorului,* încă din anii 1920. În esenţă, dacă un comis-voiajor sau un politician aflat în campanie are nevoie să călătorească în modul cel mai economic între un număr dat de oraşe, iar preţul călătoriei între fiecare două oraşe este cunoscut, atunci

1 E vorba despre opţiunea pe o acţiune. Pentru detalii privind formula Black-Scholes, vezi Keith Devlin, *Partida neterminată,* Editura Humanitas, Bucureşti, 2010. *(N. t.)*

călătorul trebuie cumva să găsească cea mai ieftină cale de a vizita toate oraşele şi de a se întoarce la punctul de plecare. Problema comis-voiajorului a fost rezolvată pentru 49 de oraşe din Statele Unite în 1954. Până în 2004, fusese rezolvată pentru 24 978 de oraşe din Suedia. Cu alte cuvinte, industria electronică, companiile de transport rutier, ba chiar şi fabricanţii japonezi de maşini de joc*pachinko* de tip flipper (care trebuie să bată mii de cuie) trebuie să se bazeze pe matematică pentru lucruri atât de simple precum perforarea, planificarea sau proiectarea fizică a calculatoarelor.

Matematica a pătruns chiar şi în domenii care nu erau, în mod tradiţional, asociate cu ştiinţele exacte. De pildă, există o revistă, *Journal of Mathematical Sociology* (care ajunsese în 2006 la al treizecilea volum), orientată spre înţelegerea matematică a structurilor sociale complexe, a organizaţiilor şi a grupurilor neoficiale. Articolele din revistă tratează subiecte ce se întind de la modele matematice pentru predicţia opiniei publice la cele pentru predicţia interacţiunilor în grupurile sociale.

Mergând în cealaltă direcţie – de la matematică spre ştiinţele umaniste –, domeniul lingvisticii computaţionale, care implica iniţial numai informaticieni, a devenit acum o cercetare interdisciplinară care reuneşte lingvişti, psihologi cognitivişti, logicieni şi specialişti în inteligenţa artificială, pentru a studia complexitatea limbajelor care au evoluat pe cale naturală.

Ne joacă oare cineva o farsă, astfel încât toate eforturile umane de a înţelege în profunzime conduc până la urmă la dezvăluirea unor domenii matematice tot mai subtile pe baza cărora a apărut universul şi, împreună cu el, am apărut noi, făpturile sale complexe? Este matematica, aşa cum le place dascălilor să spună, manualul secret, cel după care predă profesorul, dar el le oferă studenţilor o versiune mult mai simplă, astfel încât să pară cu atât mai înţelept? Sau, ca să folosesc o metaforă biblică, este matematica, într-un anume sens, fructul ultim al pomului cunoaşterii?

După cum am văzut pe scurt la începutul acestui capitol, imprevizibila eficacitate a matematicii generează multe întrebări: are matematica o existenţă complet independentă de mintea umană? Cu alte cuvinte, doar *descoperim* adevărurile matematice, la fel cum astronomii descoperă galaxii necunoscute până atunci? Sau matematica este o *invenţie* omenească? Dacă matematica există cu adevărat într-un tărâm abstract al zânelor, care e relaţia dintre lumea mistică şi realitatea fizică? Cum poate creierul uman, cu limitările sale cunoscute, să aibă acces la o asemenea lume imuabilă, în afara spaţiului şi timpului? Pe de altă parte, dacă matematica e doar o invenţie omenească şi nu are nicio existenţă în afara minţilor noastre, cum putem explica faptul că inventarea atâtor adevăruri matematice anticipează în mod miraculos întrebări legate de cosmos şi de viaţa umană care au fost puse abia secole mai târziu? Nu e uşor de răspuns la aceste întrebări. După cum voi arăta în această carte, nici măcar matematicienii zilelor moderne, specialiştii în ştiinţe cognitive şi filosofii nu cad de acord asupra răspunsurilor. În 1989, matematicianul francez Alain Connes, laureat a doua dintre cele mai prestigioase premii în matematică, Medalia Fields (1982) şi Premiul Crafoord (2001), şi-a exprimat foarte clar punctul de vedere:

Să luăm, de pildă, numerele prime [cele care se împart doar la unu şi la ele însele] care, în ce mă priveşte, constituie o realitate mai stabilă decât realitatea materială înconjurătoare. Matematicianul activ poate fi asemănat cu un explorator care îşi propune să descopere lumea. Descoperim fapte fundamentale prin experienţă. Făcând calcule simple, ne dăm seama, de pildă, că şirul numerelor prime pare să fie nesfârşit. Atunci, misiunea matematicianului este să demonstreze că există o infinitate de numere prime. Acesta e, firește, un vechi rezultat care i se datorează lui Euclid. Una dintre cele mai interesante consecinţe ale acestei demonstraţii este că, dacă cineva pretinde într-o bună zi că a găsit cel mai mare număr prim, va fi uşor de arătat că se înşală. Acelaşi lucru e valabil

pentru orice demonstraţie. Ne izbim aici de o realitate la fel de incontestabilă ca realitatea fizică.

Martin Gardner, faimosul autor al cărţilor de matematică distractivă, este şi el de părere că matematica e *descoperire.* Pentru el, nu încape îndoială, numerele şi matematica au propria lor existenţă, indiferent dacă oamenii îşi dau sau nu seama. „Dacă doi dinozauri se alătură altor doi dinozauri într-o poiană, a spus el odată, vor fi acolo patru dinozauri, chiar dacă nu se află în preajmă niciun om care să observe, iar animalele sunt prea proaste ca să ştie lucrul ăsta". După cum sublinia Connes, partizanii „matematiciica-descoperire" (care se conformează, după cum vom vedea, perspectivei platoniciene) subliniază faptul că, odată ce un concept matematic e înţeles, să zicem numerele naturale 1, 2, 3, 4… ne lovim de fapte indeniabile, de pildă 32 + 42 = 52, indiferent ce credem despre aceste relaţii. Acest lucru dă cel puţin impresia că suntem în contact cu o realitate existentă.

Alţii nu sunt de acord. În recenzia cărţii în care Connes îşi prezenta ideile, matematicianul britanic Sir Michael Atiyah (laureat al Medaliei Fields în 1966 şi al Premiului Abel în 2004) remarca:

Orice matematician trebuie să simpatizeze cu Connes. Simţim cu toţii că întregii sau cercurile există cu adevărat într-un sens abstract, iar perspectiva platoniciană [pe care o voi prezenta în detaliu în capitolul 2] e extrem de seducătoare. Dar o putem într-adevăr susţine? Dacă universul ar fi fost unidimensional sau chiar discret[2], este greu de văzut cum ar fi evoluat geometria. Poate să pară că întregii stau pe baze mai solide şi că numărătoarea e cu adevărat o noţiune primordială. Dar să ne închipuim că inteligenţa ar aparţine nu rasei umane, ci unei uriaşe meduze solitare şi izolate din adâncurile Oceanului Pacific. Ea nu ar avea experienţa obiectelor individuale, ci doar a apei înconjurătoare. Mişcarea, temperatura şi presiunea i-ar furniza datele senzoriale de bază. Într-un asemenea

2 In matematică, „discret" e antonimul lui „continuu". *(N. t.)*

continuu pur, lumea discretă nu s-ar ivi şi nu ar fi nimic de numărat.

Atiyah crede deci că „omul *a creat* [sublinierea îmi aparţine] matematica idealizând şi abstractizând elemente din lumea fizică”. Lingvistul George Lakoff şi psihologul Rafael Núñez sunt de aceeaşi părere. În cartea *lor de unde provine matematica,* ei conchid: „Matematica este o parte naturală a fiinţei umane. Ea apare din trupurile, creierele şi experienţele noastre zilnice în lumea înconjurătoare”.

Punctul de vedere al lui Atiyah, Lakoff şi Núñez ridică altă întrebare interesantă. Dacă matematica e o invenţie pe deplin umană, este ea într-adevăr universală? Cu alte cuvinte, dacă ar exista civilizaţii extraterestre, ar inventa ele aceeaşi matematică? Carl Sagan (1934 – 1996) credea că răspunsul la ultima întrebare este afirmativ. În cartea sa *Cosmos,* vorbind despre ce tip de semnal ar transmite în spaţiu o civilizaţie inteligentă, el spune: „Este extrem de improbabil ca un proces fizic natural oarecare să poată transmite mesaje radio conţinând numai numere prime. Dacă am primi un asemenea mesaj, am deduce că există undeva o civilizaţie căreia, cel puţin, îi plac numerele prime”. Dar cât de sigur e acest fapt? În recenta sa carte *Un nou tip de ştiinţă,* specialistul în fizică matematică Stephen Wolfram susţine că ceea ce numim „matematica noastră” poate fi doar o posibilitate dintr-o bogată diversitate de „arome” ale matematicii. De pildă, în loc să folosim reguli bazate pe ecuaţii matematice pentru a descrie natura, am putea folosi tipuri diferite de reguli, încorporate în programe de calculator simple. Mai mult, unii cosmologi au discutat recent chiar şi posibilitatea ca universul nostru să nu fie decât un element al unui *multivers* – un ansamblu uriaş de universuri. Dacă un asemenea *multivers* ar exista într-adevăr, ne-am aştepta oare ca celelalte universuri să aibă aceeaşi matematică?

Specialiştii în biologie moleculară şi cei în ştiinţe cognitive aduc în discuţie o altă perspectivă, bazată pe studiul facultăţilor creierului. Pentru unii dintre ei, matematica nu e foarte diferită de limbaj. Cu alte cuvinte,

în acest scenariu „cognitiv”, după mii şi mii de ani în care oamenii s-au holbat la două mâini, doi ochi şi doi sâni, a apărut definiţia abstractă a numărului 2, foarte asemănător modului în care cuvântul „pasăre” a ajuns să reprezinte multe animale cu două aripi care pot zbura. După cum spunea neurologul Jean-Pierre Changeux: „Pentru mine, metoda axiomatică [folosită, de pildă, în geometria euclidiană] este expresia facultăţilor cerebrale legate de folosirea creierului uman, căci ceea ce caracterizează limbajul este tocmai caracterul său generator”. Dar, dacă matematica nu e decât un alt limbaj, cum putem explica faptul că, deşi copiii învaţă cu uşurinţă limbile, multora li se pare atât de greu să studieze matematica? Marjory Fleming (1803 – 1811), copil-minune din Scoţia, a descris minunat greutăţile de care se lovesc elevii în studiul matematicii. Fleming, care n-a trăit să se bucure de cea de-a noua aniversare a zilei sale de naştere, a lăsat în urmă jurnale ce conţin peste nouă mii de cuvinte în proză şi cinci sute de versuri. Ea se plânge într-un loc: „Am să vă vorbesc acum despre cumplita şi ticăloasa pedeapsă la care mă supune tabla înmulţirii; nici nu vă puteţi închipui. Lucrul cel mai diabolic este 8 ori 8 şi 7 ori 7; natura însăşi nu poate îndura aşa ceva”.

Câteva dintre elementele întrebărilor complicate pe care le-am prezentat pot fi reformulate: există vreo diferenţă fundamentală între matematică şi alte expresii ale spiritului uman, ca artele plastice sau muzica? Dacă nu există, de ce matematica are un remarcabil caracter coerent şi necontradictoriu care nu pare să fie prezent în nicio altă creaţie umană? Geometria lui Euclid, de pildă, rămâne la fel de corectă astăzi (acolo unde se aplică) cum era şi în anul 300 î. Cr; ea reprezintă „adevăruri” care ne sunt impuse. Dimpotrivă, astăzi nu suntem obligaţi să ascultăm aceeaşi muzică pe care o ascultau vechii greci, nici să acceptăm modelul naiv al lui Aristotel privind cosmosul.

Foarte puţine subiecte ştiinţifice de azi folosesc încă idei vechi de trei mii de ani. Pe de altă parte, cele mai

recente cercetări în matematică se pot referi la teoreme care au fost publicate anul trecut sau săptămâna trecută, dar pot folosi şi formula suprafeţei sferei demonstrată de Arhimede pe la 250 î. Cr! Modelul atomic bazat pe teoria nodurilor din secolul XIX n-a supravieţuit decât două decenii, pentru că noi descoperiri au dovedit că unele elemente ale teoriei erau greşite. Aşa progresează ştiinţa. Newton le-a fost recunoscător (sau nu! vezi capitolul 4) pentru perspectiva sa vastă acelor uriaşi pe umerii cărora s-a urcat. Şi-ar fi putut de asemenea cere iertare faţă de acei uriaşi ale căror lucrări au devenit depăşite din pricina sa.

Nu la fel se întâmplă lucrurile în matematică. Chiar dacă formalismul necesar demonstrării anumitor rezultate s-a schimbat, rezultatele matematice însele nu se schimbă. De fapt, după cum a spus odată matematicianul Ian Stewart, „Există un cuvânt în matematică pentru rezultatele anterioare care sunt apoi modificate – se numesc pur şi simplu *greşeli*”. Iar ele sunt considerate greşeli nu din pricina unor noi descoperiri, ca în alte ştiinţe, ci din pricina unei raportări mai atente şi mai riguroase la aceleaşi vechi adevăruri matematice. Face oare acest lucru ca matematica să fie limba maternă a lui Dumnezeu?

În cazul în care găsiţi că nu e important să înţelegeţi dacă matematica a fost inventată sau descoperită, gândiţi-vă ce încărcătură capătă diferenţa dintre „inventat” şi „descoperit” în întrebarea: Dumnezeu a fost inventat sau descoperit? Sau, şi mai provocator: Dumnezeu i-a creat pe oameni după chipul şi asemănarea lui sau oamenii l-au inventat pe Dumnezeu după chipul şi asemănarea lor?

În cartea de faţă voi încerca să abordez multe dintre aceste întrebări stranii şi răspunsurile lor tulburătoare. Voi trece astfel în revistă descoperirile unora dintre cei mai mari matematicieni, fizicieni, filosofi, specialişti în ştiinţe cognitive şi lingvişti din secolele trecute şi din prezent. Voi cerceta şi opiniile, obiecţiile şi rezervele multor gânditori moderni. Începem această călătorie captivantă cu

perspectiva întemeietoare a filosofilor din Antichitate.

Capitolul 2
Misticii: Numerologul şi filosoful

Oamenii au fost dintotdeauna stăpâniţi de dorinţa de a înţelege cosmosul. Eforturile lor de-a da de capăt întrebării „Ce înseamnă toate acestea?” le-au depăşit cu mult pe cele necesare doar supravieţuirii, îmbunătăţirii situaţiei economice sau calităţii vieţii. Ceea ce nu înseamnă că toată lumea a fost tot timpul angajată activ în căutarea vreunei ordini naturale sau metafizice. Oamenii care se luptă pentru supravieţuire rareori îşi permit luxul de a medita la sensul vieţii. În galeria celor care s-au străduit să găsească tiparele ce stau la baza complexităţii vizibile a universului, câţiva s-au ridicat cu mult deasupra celorlalţi.

Pentru mulţi, numele matematicianului, savantului şi filosofului René Descartes (1596 – 1650) e sinonim cu naşterea epocii moderne a filosofiei ştiinţei. Descartes a fost unul dintre principalii arhitecţi ai tranziţiei de la descrierea lumii naturale prin proprietăţile percepute direct de simţurile noastre la explicaţii exprimate prin cantităţi matematice bine definite. În loc să caracterizeze vag sentimente, mirosuri, culori şi senzaţii, Descartes a căutat explicaţii ştiinţifice pentru a sonda la nivel fundamental şi pentru a folosi limbajul matematicii:

Nu recunosc nicio materie în lucrurile corporale în afară de cea pe care geometrii o numesc *cantitate* şi pe care o folosesc în demonstraţiile lor […] şi, cum toate fenomenele naturale pot fi explicate în acest fel, nu cred că alte principii sunt acceptabile sau de dorit în fizică.

E interesant de observat că Descartes excludea din marea sa perspectivă ştiinţifică tărâmurile „gândului şi minţii”, pe care le considera independente de lumea explicabilă matematic a materiei. Deşi Descartes a fost fără îndoială unul dintre gânditorii cu cea mai mare influenţă din ultimele patru secole (şi mă voi întoarce la el

în capitolul 4), nu el este primul care a acordat matematicii un rol central. Idei radicale privind un cosmos impregnat şi guvernat de matematică – idei care, într-un anume sens, mergeau chiar mai departe decât cele ale lui Descartes – au fost pentru prima dată exprimate, deşi cu o puternică nuanţă mistică, cu mai bine de două milenii în urmă. Cel care, potrivit legendei, spunea că sufletul ajunge la „armonie" când se ocupă cu matematica pură a fost enigmaticul Pitagora.

Pitagora

Pitagora (cca. 572 – 497 î.Hr.) a fost pesemne primul filosof care s-a ocupat deopotrivă de cercetarea naturii şi de viaţa spirituală – om de ştiinţă şi, în acelaşi timp, gânditor religios plin de har. Se crede că el a introdus termenii „filosofie", însemnând dragoste de înţelepciune, şi „matematică" – studiu. Deşi nu s-a păstrat niciuna dintre scrierile lui Pitagora (dacă aceste scrieri vor fi existat vreodată, căci multe lucruri au fost comunicate oral), avem trei biografii amănunţite ale lui Pitagora, nu întru totul demne de încredere, datând din secolul III. O a patra biografie, anonimă, s-a păstrat în scrierile patriarhului şi filosofului bizantin Photios (cca. 820 – 891). Principala dificultate în încercarea de a stabili contribuţiile personale ale lui Pitagora ţine de faptul că adepţii şi discipolii săi – pitagoricienii – i-au atribuit mereu toate ideile lor. Ca urmare, până şi lui Aristotel (384 – 322 î.Hr.) i se pare greu de identificat în ce proporţie filosofia pitagoreică îi poate fi atribuită cu certitudine lui Pitagora însuşi, drept care vorbeşte în general despre „pitagoricieni" şi „cei numiţi pitagoricieni". Totuşi, dată fiind faima lui Pitagora în tradiţia ulterioară, se presupune că acesta s-a aflat la originea cel puţin a unora dintre teoriile pitagoreice preţuite de Platon şi chiar de Copernic.

Este aproape cert că Pitagora s-a născut la începutul secolului VI î.Hr. pe insula Samos, aproape de coasta Turciei de azi. Se pare că a călătorit mult în prima parte a vieţii, mai ales în Egipt şi poate în Babilon, unde va fi primit cel puţin o parte din educaţia sa matematică. În cele

din urmă, a emigrat într-o mică colonie grecească, la Crotona, în sudul Italiei, unde un grup entuziast de elevi şi discipoli s-a adunat repede în jurul său.

Istoricul grec Herodot (cca. 485 – 425 î.Hr.) îl numeşte pe Pitagora „cel mai înzestrat filosof între greci", iar filosoful şi poetul presocratic Empedocle (cca. 492 – 432 î.Hr.) adaugă plin de admiraţie:

Printre aceştia trăia un bărbat învăţat fără seamăn care avea în păstrare tezaur de-aleasă ştiinţă;

El stăpânea meşteşuguri din cele mai felurite.

De câte ori deci se încorda cu forţele-i toate.

El uşor observa orice lucru din tot ce există Vreme de zece, vreme de douăzeci, vârste de oameni.[3]

Nu toţi erau însă la fel de impresionaţi. În comentarii care par să se tragă dintr-o rivalitate personală, filosoful Heraclit din Efes (cca. 535 – 475 î.Hr.) recunoaşte vastele cunoştinţe ale lui Pitagora, dar se grăbeşte să adauge: „Mulţimea cunoştinţelor nu te învaţă să ai minte; altfel i-ar fi învăţat pe Hesiod [poet grec care a trăit pe la 700 î.Hr.] şi pe Pitagora".

Pitagora şi primii pitagoricieni nu erau nici matematicieni, nici oameni de ştiinţă în sensul strict al acestor termeni. În centrul doctrinelor lor se află mai curând o filosofie metafizică a sensului numerelor. Pentru pitagoricieni, numerele erau în acelaşi timp entităţi vii şi principii universale, impregnând totul, de la cer la etica umană. Cu alte cuvinte, numerele aveau două aspecte distincte, complementare. Pe de o parte, aveau o existenţă fizică tangibilă; pe de alta, erau prescripţii abstracte pe care se întemeia totul. De pildă, *monada* (numărul 1) era înţeleasă atât ca generatoare a tuturor celorlalte numere, o entitate la fel de reală ca apa, aerul şi focul care participau la structura lumii fizice, cât şi ca idee – unitatea metafizică la originea întregii creaţii. Englezul Thomas Stanley (1625 – 1678), istoric al filosofiei, a caracterizat minunat (în engleza veacului XVII) cele două înţelesuri pe

3 Citatele din filozofii presocratici sunt din *Filosofia greacă până la Platon,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1979. *(N. t.)*

care pitagoricienii le asociau numerelor:

Numerele sunt de două feluri: Mental (sau imaterial) şi Util. Mentalul este acea substanţă eternă a Numărului despre care Pitagora, în scrierea lui despre zei, spune că este *principiul providenţial al Cerului şi al Pământului, precum şi al naturii care se află între ele.* [...] Acesta e ceea ce se numeşte *principiul, izvorul şi rădăcina tuturor lucrurilor* [...]. Numărul Util este ceea ce Pitagora defineşte ca *extinderea şi traducerea în act a cauzelor embrionare care se află în Monadă sau în mai multe Monade.*

Numerele nu erau deci simple instrumente pentru a desemna cantităţi sau sume, ci ele trebuiau descoperite, erau agenţii formatori care acţionează în natură. Totul în univers, de la obiectele materiale precum Pământul la conceptele abstracte precum dreptatea, era număr.

Faptul că cineva găseşte numerele fascinante nu e surprinzător în sine. La urma urmelor, chiar numerele obişnuite din viaţa de zi cu zi au proprietăţi interesante. Să luăm numărul de zile dintr-un an – 365. Puteţi lesne vedea că 365 este egal cu suma a trei pătrate consecutive: 365 = 102 + 112 + 122. Dar asta nu e tot; el este de asemenea egal cu suma următoarelor două pătrate (365 = 132 + 142)! Sau să examinăm numărul zilelor din luna lunară – 28. Acest număr e suma tuturor divizorilor săi (numerele la care se împarte fără rest): 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14. Numerele cu această proprietate se numesc *numere perfecte* (primele patru numere perfecte sunt 6, 28, 496, 8218). Să observăm şi că 28 este suma cuburilor primelor două numere impare: 28 = 13 + 33. Chiar şi un număr atât de larg folosit în sistemul nostru zecimal cum este 100 are particularităţile sale: 100 = 13 + 23 + 33 + 43. E clar, numerele ne pot uimi. Şi totuşi, care e originea doctrinei pitagoreice a numerelor? Cum a apărut ideea nu numai că tuturor lucrurilor li se asociază un număr, dar că toate lucrurile *sunt* numere? Din moment ce Pitagora fie n-a scris nimic, fie scrierile sale se vor fi pierdut, nu e uşor de răspuns la această întrebare. Ne putem face o imagine

despre argumentele lui Pitagora bazându-ne pe câteva fragmente presocratice şi pe comentarii ulterioare, nu întru totul demne de încredere, în majoritate aparţinând filosofilor platonicieni şi aristotelicieni. Imaginea ce reiese din coroborarea diferitelor indicii arată că explicaţia pentru obsesia numerelor poate fi găsită în interesul pitagoricienilor pentru două activităţi aparent neînrudite: experimentele muzicale şi observarea cerului.

Pentru a înţelege cum se materializau aceste misterioase legături dintre numere, cer şi muzică, trebuie să pornim de la interesanta observaţie că pitagoricienii *reprezentau* numerele cu ajutorul pietricelelor sau al punctelor. De pildă, ei aranjau numerele naturale 1, 2, 3, 4... în ansambluri de pietricele formând triunghiuri (ca în figura 1). În particular, triunghiul construit din primele patru numere întregi (aranjate într-un triunghi cu zece pietricele) se numea *tetraktys* (însemnând pătrar sau „cuaternitate") şi simboliza pentru pitagoricieni desăvârşirea şi însuşirile care o presupun. Acest fapt e menţionat într-o istorisire despre Pitagora aparţinându-i autorului satiric grec Lucian (cca. 120 – 180 d.Hr.). Pitagora îi cere cuiva să numere. Omul începe să numere, Pitagora îl întrerupe: „Vezi? Ceea ce iei drept 4 este 10, un triunghi perfect şi jurământul nostru". Filosoful neoplatonician Iamblichos (cca. 250 – 325 d.Hr.) ne spune că, într-adevăr, jurământul pitagoricienilor era:

Da! Jur pe cel ce-a dăruit seminţiei noastre tetraktys-ul.

Număr ce cuprinde izvorul şi rădăcina veşnic curgătoarei naturi.

Figura 1

De ce era *tetraktys-ul* atât de venerat? Pentru că, în

ochii pitagoricienilor din secolul VI î.Hr., părea să reprezinte întreaga natură a universului. În geometrie – trambulina către formidabila revoluţie greacă în gândire –, numărul 1 reprezenta un punct –, 2 reprezenta o linie –, 3 reprezenta o suprafaţă iar 4 reprezenta un tetraedru tridimensional. *Tetraktys-ul* părea deci să cuprindă toate dimensiunile spaţiului aşa cum îl percepem.

Dar acesta era doar începutul. *Tetraktys-ul* şi-a făcut apariţia neaşteptată chiar şi în abordarea ştiinţifică a muzicii. Se consideră în genere că Pitagora şi pitagoricienii au descoperit că împărţirea unei corzi la întregi consecutivi produce armonice şi intervale consonante – ceea ce se poate observa la orice concert al unui cvartet de coarde. Când două corzi asemănătoare sunt atinse simultan, sunetul rezultant este plăcut dacă lungimile corzilor se află în rapoarte simple. De pildă, corzi de lungime egală (raport 1: 1) produc un unison; un raport de 1: 2 produce o octavă; 2: 3 produce o cvintă perfectă; iar 3: 4, cvarta perfectă. Prin urmare, în plus faţă de atributele sale spaţiale atotcuprinzătoare, se putea considera că *tetraktys-ul* reprezintă raporturile matematice care stau la baza armoniei gamei muzicale. Această aparent magică unitate dintre spaţiu şi muzică a generat pentru pitagoricieni un simbol puternic şi le-a dat sentimentul *armoniei* („potrivirea împreună”) *cosmosului* („frumoasa ordine a lucrurilor”).

Ce loc ocupă cerul în toată povestea asta? Pitagora şi pitagoricienii au jucat în istoria astronomiei un rol care, fără să fie esenţial, nu a fost neglijabil. Ei s-au numărat printre primii care au susţinut că Pământul are formă sferică (probabil din pricina superiorităţii matematico-estetice a sferei). Au fost probabil şi cei dintâi care au afirmat că planetele, Soarele şi Luna posedă propria lor mişcare independentă, de la vest spre est, în direcţie opusă rotaţiei (aparente) diurne a sferei stelelor fixe. Cele mai frapante proprietăţi ale constelaţiilor – forma şi numărul – nu le puteau scăpa acestor observatori entuziaşti ai cerului nocturn. Fiecare constelaţie e

recunoscută după numărul de stele care o compun şi după figura geometrică pe care o formează ele. Dar aceste două însuşiri erau tocmai ingredientele esenţiale ale doctrinei pitagoreice a numerelor, după cum e exemplificată prin *tetraktys.* Pitagoricienii erau atât de fascinaţi de dependenţa de numere a figurilor geometrice, a constelaţiilor şi a armoniilor muzicale, încât numerele au devenit atât cărămizile care alcătuiau universul, cât şi principiile pe care se întemeia existenţa sa. Nu e de mirare că dictonul lui Pitagora afirma cu tărie: „Totul e potrivit după număr".

Două dintre observaţiile lui Aristotel arată în ce măsură pitagoricienii luau în serios acest dicton. În *Metafizica* sa, Aristotel spune: „... cei numiţi pitagoricieni sunt primii care să se fi apucat de matematici, pe care le-au făcut să progreseze. Hrăniţi, aşadar, cu matematici, ei au socotit că principiile acestora sunt şi principiile tuturor lucrurilor."[4] În alt pasaj, Aristotel descrie plastic veneraţia faţă de numere şi rolul aparte al *tetraktys-ului*: „Eurytos [elev al pitagoricianului Philolaos] a stabilit care este numărul unui anume lucru [...] [d]e pildă, acest număr este al omului, celălalt al calului – *precum fac cei care aplică numerele la figuri – triunghi, pătrat, în acest fel ei închipuie formele vietăţilor cu pietricele".* Ultima propoziţie („figuri – triunghi, pătrat") trimite atât la *tetraktys,* cât şi la altă fascinantă construcţie pitagoreică – gnomonul.

Cuvântul „gnomon" („indicator") îşi trage originea din numele unui dispozitiv astronomic babilonian de măsurare a timpului, asemănător cadranului solar. Se pare că acest aparat a fost introdus în Grecia de profesorul lui Pitagora – filozoful naturii Anaximandru (cca. 611 – 547 î.Hr.). Nu încape îndoială că elevul a fost influenţat de ideile geometrice ale dascălului său şi de aplicarea lor la *cosmologie* – studiul universului în întregul lui. Mai târziu, termenul „gnomon" a fost folosit pentru un instrument de

4 Aristotel, *Metafizica,* traducere de Andrei Cornea, Editura Humanitas, Bucureşti, 2001. *(N. red.)*

trasat unghiuri drepte, asemănător cu echerul tâmplarului, sau pentru figura în unghi drept care, atunci când e adăugată unui pătrat, produce un pătrat mai mare (ca în figura 2). Observaţi că, dacă adăugaţi, de pildă, unui pătrat 3 x 3 şapte pietricele într-o formă care alcătuieşte un unghi drept (un gnomon), obţineţi un pătrat compus din şaisprezece (4 x 4) pietricele.

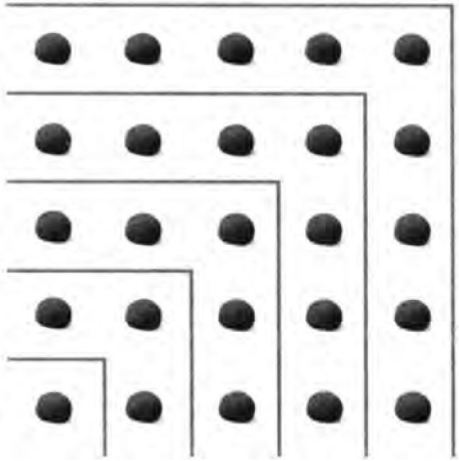


Figura 2

Aceasta e o reprezentare figurativă a următoarei proprietăţi: în şirul întregilor impari 1, 3, 5, 7, 9... suma oricărui număr de termeni succesivi (începând cu 1) formează întotdeauna pătratul unui număr. De pildă: 1 = 12, 1 + 3 = 4 = 22, 1 + 3 + 5 = 9 = 32, 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 42, 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 52 etc. Pitagoricienii priveau această relaţie intimă dintre gnomon şi pătratul pe care îl „cuprinde" ca pe un simbol al cunoaşterii în general, în care cunoaşterea „îmbrăţişează" cunoscutul. Numerele nu se limitau deci la descrierea lumii fizice, ci se presupunea că se aflau şi la rădăcina proceselor mentale şi afective.

Numerele pătrate asociate cu gnomoanele au fost pesemne precursorii faimoasei *teoreme a lui Pitagora.* Această celebră afirmaţie matematică spune că pentru orice triunghi dreptunghic (figura 3), un pătrat desenat pe

ipotenuză are o arie egală cu suma pătratelor desenate pe laturi. Descoperirea teoremei a fost „documentată” umoristic într-o faimoasă caricatură *Frank & Ernest*[5] (figura 4). Aşa cum arată gnomonul din figura 2, adăugarea unui gnomon număr pătrat, 9 = 32, unui pătrat 4 x 4 produce un nou pătrat 5 x 5: 32 + 42 = 52. Numerele 3, 4, 5 pot deci reprezenta lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic. Numerele întregi cu această proprietate (de exemplu 5, 12, 13, din moment ce 52 + 122 = 132) se numesc „triplete pitagoreice”.

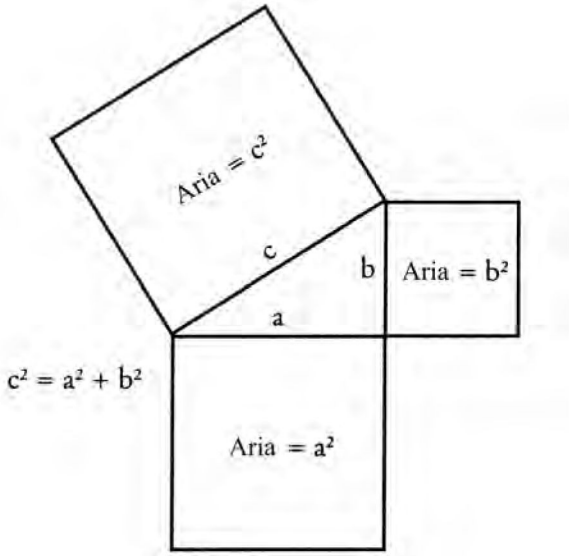


Figura 3

5 Benzi desenate aparţinând caricaturistului american Bob Thaves. *(N. t.)*

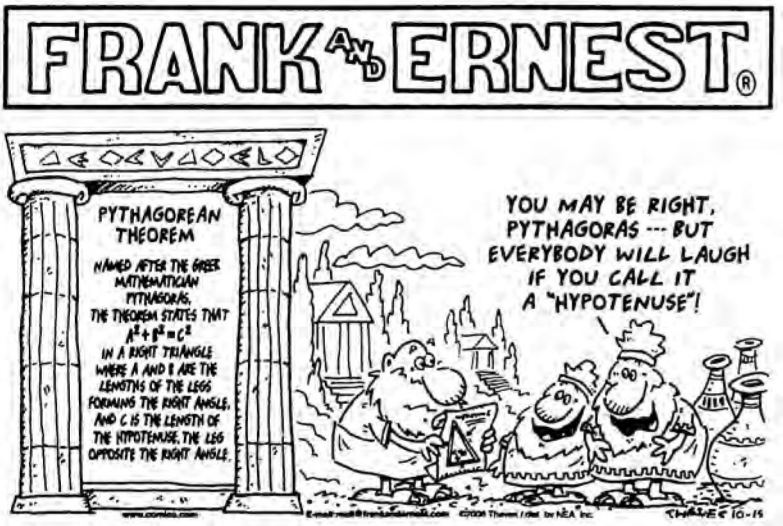

FRANK AND ERNEST®
PYTHAGOREAN THEOREM
NAMED AFTER THE GREEK MATHEMATICIAN PYTHAGORAS, THE THEOREM STATES THAT $A^2+B^2=C^2$ IN A RIGHT TRIANGLE WHERE A AND B ARE THE LENGTHS OF THE LEGS FORMING THE RIGHT ANGLE, AND C IS THE LENGTH OF THE HYPOTENUSE. THE LEG OPPOSITE THE RIGHT ANGLE.
YOU MAY BE RIGHT, PYTHAGORAS --- BUT EVERYBODY WILL LAUGH IF YOU CALL IT A "HYPOTENUSE"!

Figura 4

S-ar putea să ai dreptate, Pitagora... dar toată lumea o să râdă de tine dacă o numeşti „ipotenuză”!

Puţine teoreme matematice se bucură de celebritatea teoremei lui Pitagora. În 1971, când Republica Nicaragua a ales „zece ecuaţii matematice care au schimbat faţa lumii” ca temă a unei serii de timbre, teorema lui Pitagora a apărut pe cel de-al doilea timbru (figura 5; primul timbru reprezenta „1 + 1 = 2”).

A fost Pitagora cu adevărat primul care a formulat binecunoscuta teoremă ce i se atribuie? Aşa credeau, fără îndoială, unii dintre istoricii greci antici. Într-un comentariu la *Elementele* – masivul tratat de geometrie şi teoria numerelor scris de Euclid (cca. 325265 î.Hr.) – filosoful grec Proclos (cca. 411 – 485 d.Hr.) scria: „Dacă vrea cineva să dea ascultare celor care au studiat învăţăturile din vechime, unii atribuie această teoremă lui Pitagora, spunând că el o descoperise şi jertfise un bou pentru a sărbători această descoperire”. Triplete pitagoreice pot fi însă găsite pe tableta cuneiformă babiloniană cunoscută ca Plimton 322, care datează din vremea dinastiei lui Hammurabi (cca. 1900 – 1600 î.Hr.). Mai mult, construcţii geometrice bazate pe teorema lui

Pitagora au fost găsite în India, în legătură cu construirea altarelor. Aceste construcţii erau fără îndoială cunoscute celui care a scris *Shatapatha Brahmana* (comentariu la textele vedice), pesemne cu cel puţin câteva secole înainte de Pitagora. Dar, indiferent dacă Pitagora a fost sau nu descoperitorul teoremei, e limpede că legăturile repetate găsite între numere, forme şi univers i-au dus pe pitagoricieni cu un pas mai aproape de o metafizică bine articulată a ordinii.

Altă idee care a jucat un rol esenţial în lumea pitagoreică a fost cea a *contrariilor cosmice.* Cum modelul contrariilor era principiul fundamental în tradiţia ştiinţifică ioniană, era firesc ca pitagoricienii obsedaţi de ordine să-l adopte. De fapt, Aristotel ne spune că până şi un medic pe nume Alemaion, care trăia la Crotona pe vremea când Pitagora îşi avea acolo faimoasa şcoală, era de acord cu ideea că toate lucrurile îşi găsesc echilibrul în perechi. Principala pereche de contrarii e alcătuită din *limită,* reprezentată de numerele impare, şi *nemărginire,* reprezentată de cele pare. Limita era forţa care introduce ordine şi armonie în sălbatica, neînfrânata nelimitare. Se credea că atât complexitatea universului, la scară mare.

Figura 5

cât şi tribulaţiile vieţii umane, la nivel microcosmic,

constau din şi erau controlate de o serie de contrarii care veneau în perechi. Această perspectivă mai curând maniheistă asupra lumii a fost sintetizată într-un „tabel al contrariilor” în *Metafizica* lui Aristotel:

Limită	Nemărginire
Impar	Par
Unu	Mulţime
Dreapta	Stânga
Masculin	Feminin
Repaus	Mişcare
Drept	Curbă
Lumină	Întuneric
Bun	Rău
Pătrat	Alungit

Filosofia elementară exprimată de tabelul contrariilor nu se întâlnea doar în Grecia antică. Noţiunile chineze *yin* şi *yang, yin* reprezentând negativul şi întunericul, iar *yang* principiul luminos, dau aceeaşi imagine. Ceva asemănător se întâlneşte şi în noţiunile creştine de rai şi iad (ba chiar şi în declaraţiile prezidenţiale americane de tipul „Fie sunteţi cu noi, fie sunteţi cu teroriştii”). Mai general, sensul vieţii a fost întotdeauna lămurit de moarte, iar cel al cunoaşterii de comparaţia cu ignoranţa.

Nu toate învăţăturile pitagoreice erau legate direct de numere. Viaţa în cadrul compactului grup pitagoreic era dominată şi de vegetarianism, o puternică credinţă în

metempsihoză – nemurirea şi transmigraţia sufletelor – şi o oarecum misterioasă interdicţie de a mânca fasole. Mai multe explicaţii au fost date pentru această interdicţie: de la asemănarea fasolei cu organele genitale la comparaţia între mâncatul fasolei şi mâncatul unui suflet viu. Ultima explicaţie privea vânturile care adesea urmează după ce mănânci fasole – dovadă a unei suflări care se stinge. *Philosophy for Dummies (Filosofia pentru tonţi)* rezumă astfel doctrina pitagoreică: „Totul e făcut din numere, şi nu mâncaţi fasole, pentru că o să tragă un număr…”

Cea mai veche relatare care ne-a rămas despre Pitagora se leagă de credinţa în reîncarnarea sufletului în alte fiinţe. Această poveste aproape poetică ne parvine de la un poet din secolul VI î.Hr., Xenofan din Colofon: „Odată, în preajma cuiva care bătea un căţel, zice-se că [Pitagora] s-ar fi înduioşat şi ar fi spus: «Opreşte-te, nu-l mai bate! Căci e sufletul unui prieten, pe care l-am recunoscut auzindu-i glasul…»”.

Amprente inconfundabile ale lui Pitagora pot fi găsite nu numai în învăţăturile filosofilor greci care i-au urmat imediat, ci pe tot drumul până la programele universităţilor medievale. Cele şapte materii predate în aceste universităţi se împărţeau în *trivium,* cuprinzând dialectica, gramatica şi retorica, şi *quadrivium,* cuprinzând temele preferate ale lui Pitagora – geometria, aritmetica, astronomia şi muzica. Celesta „armonie a sferelor” – muzica despre care se presupune că e cântată de planete pe orbitele lor şi pe care, potrivit discipolilor, numai Pitagora o putea auzi – a inspirat deopotrivă poeţi şi savanţi. Faimosul astronom Johannes Kepler (1571 – 1630), cel care a descoperit legile mişcării planetelor, a ales titlul *Harmonice mundi (Armonia lumii)* pentru una dintre cele mai importante lucrări ale sale. În spirit pitagoreic, Kepler a elaborat chiar mici „teme” muzicale pentru diferite planete (la fel cum a făcut compozitorul Gustav Holst trei secole mai târziu).

Din perspectiva problemelor care ne interesează aici, odată ce despuiem filosofia pitagoreică de veşmintele

mistice, scheletul care rămâne este totuşi o afirmaţie tranşantă privind matematica, natura ei şi relaţia acesteia atât cu lumea fizică, cât şi cu mintea omenească. Pitagora şi pitagoricienii sunt părinţii căutării ordinii cosmice. Ei pot fi consideraţi întemeietorii matematicii pure, căci, spre deosebire de predecesorii lor – babilonienii şi egiptenii –, au tratat matematica drept o disciplină abstractă, ruptă de orice scopuri practice. Întrebarea dacă pitagoricienii au întemeiat matematica în chip de instrument pentru ştiinţă e una delicată. Deşi pitagoricienii au asociat toate fenomenele cu numere, numerele însele – nu fenomenele sau cauzele lor – s-au aflat în centrul atenţiei. Aceasta nu era o cale prea rodnică pe care s-o urmeze cercetarea ştiinţifică, dar doctrina pitagoreică presupunea implicit credinţa în existenţa unor legi generale ale naturii. Această credinţă, care a devenit pilonul central al ştiinţei moderne, poate să-şi fi avut rădăcinile în ideea de Destin din tragedia greacă. Până la Renaştere, această încredere în realitatea unui corp de legi ce pot explica toate fenomenele era mult mai înaintată decât toate dovezile concrete, iar abia Galilei, Descartes şi Newton au transformat-o într-o afirmaţie ce putea fi susţinută pe temeiuri inductive.

Altă contribuţie importantă atribuită pitagoricienilor a fost descoperirea tulburătoare că „religia” lor numerică era, de fapt, inaplicabilă. Numerele întregi 1, 2, 3... nu sunt de-ajuns nici măcar pentru construcţia matematicii, ca să nu mai vorbim de descrierea universului. Examinaţi pătratul din figura 6, în care lungimea unei laturi este de o unitate şi în care notăm *cu el* lungimea diagonalei. Putem găsi cu uşurinţă lungimea diagonalei, folosind teorema lui Pitagora în oricare dintre cele două triunghiuri în care e împărţit pătratul. Potrivit teoremei, pătratul diagonalei (ipotenuza) este egal cu suma pătratelor celor două laturi mai scurte: d2 = 12 + 12, sau d2 = 2. Odată ce cunoaştem pătratul unui număr pozitiv, găsim numărul extrăgând rădăcina sa pătrată (de exemplu, dacă x2 = 9, atunci valoarea pozitivă a lui x = V9 = 3). Prin urmare, d2 = 2

implică *d* = V2 unităţi. Deci raportul dintre lungimea diagonalei şi lungimea laturii pătratului este numărul V2. Aceasta a constituit adevăratul şoc – o descoperire care a dărâmat meticulos elaborata filosofie pitagoreică a numerelor discrete. Unul dintre pitagoricieni

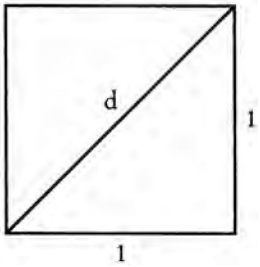


Figura 6

(pesemne Hippasos din Metapont, care a trăit în prima parte a secolului V î.Hr.) a reuşit să demonstreze că rădăcina pătrată a lui doi nu poate fi exprimată ca raportul dintre două numere întregi. Cu alte cuvinte, deşi avem o infinitate de numere întregi din care putem alege, căutarea a doua dintre ele care să dea un raport de V2 este de la început sortită eşecului. Numerele care pot fi exprimate ca rapoarte de numere întregi (de exemplu 3/17; 2/5; 1/10; 6/1) se numesc *numere raţionale.* Pitagoricienii au demonstrat că V2 nu este un număr raţional. De fapt, curând după descoperirea iniţială, s-a înţeles că nu erau numere raţionale nici V3, V17 sau rădăcina pătrată a oricărui număr care nu e pătrat perfect (ca 16 sau 25). Consecinţele erau teribile: pitagoricienii au arătat că suntem obligaţi să adăugăm infinităţii numerelor raţionale o infinitate de noi tipuri de numere – cele pe care le numim astăzi *numere iraţionale.* Importanţa acestei descoperiri pentru dezvoltarea ulterioară a analizei matematice e imensă. Între altele, a condus la recunoaşterea existenţei infiniţilor „numărabili" şi „nenumărabili", în secolul XIX. Pitagoricienii au fost însă atât de şocaţi de această criză filosofică, încât Iamblichos spune că cel care a descoperit numerele iraţionale şi le-a dezvăluit natura „celor nedemni de a se împărtăşi din asemenea cunoştinţe" şi-a atras „un

resentiment atât de mare, încât nu a fost numai exclus din comunitate [a pitagoricienilor] şi de la mesele obştei, dar i-a fost chiar durat un mormânt, ca şi cum cel care fusese odată un tovarăş al celorlalţi discipoli ar fi încetat cu adevărat să mai trăiască”.

Poate chiar mai important decât descoperirea numerelor iraţionale a fost accentul pus de Pitagora pe demonstraţia matematică – un procedeu bazat în întregime pe raţionamentul logic, prin care, pornind de la câteva postulate, se putea stabili fără ambiguitate valabilitatea oricărei propoziţii matematice. Înaintea grecilor, nici măcar matematicienii nu se aşteptau ca cineva să fie interesat de strădaniile intelectuale care îi conduseseră la o anume descoperire. Dacă o reţetă matematică era aplicabilă în practică – la parcelarea unui teren, de pildă –, acest lucru era o dovadă suficientă. Grecii însă voiau să explice de ce funcţiona. Deşi ideea de demonstraţie pare să fi fost introdusă de filosoful Thales din Milet (cca. 625547 î.Hr.), pitagoricienii au fost cei care au transformat această practică într-un instrument impecabil pentru stabilirea adevărurilor matematice. În logică, importanţa acestei descoperiri a fost imensă. Demonstraţii întemeiate pe postulate au aşezat imediat matematica pe o bază mult mai solidă decât orice altă disciplină analizată de filosofii acelor timpuri. Odată prezentată o demonstraţie riguroasă, întemeiată pe paşi de raţionament care nu lăsau lacune, corectitudinea afirmaţiei matematice era inatacabilă. Până şi Arthur Conan Doyle, creatorul celui mai celebru detectiv din lume, recunoştea statutul aparte al demonstraţiei matematice. În romanul *Un studiu în roşu,* Sherlock Holmes îşi consideră concluziile „la fel de sigure ca oricare dintre propoziţiile lui Euclid”.

În privinţa întrebării dacă matematica a fost descoperită sau inventată, Pitagora şi pitagoricienii nu aveau nicio îndoială – matematica era reală, imuabilă, omniprezentă şi mai minunată decât orice s-ar putea ivi din plăpânda minte omenească. Pitagoricienii încorporau literalmente universul în matematică. De fapt, pentru

pitagoricieni, nu Dumnezeu era matematician, ci *matematica era Dumnezeu*!

Importanţa filosofiei pitagoreice nu rezidă doar în valoarea ei intrinsecă. Fixând cadrul şi, într-o anumită măsură, scopurile pentru următoarea generaţie de filosofi – în particular, Platon –, pitagoricienii au pus bazele liniei directoare dominante în gândirea europeană.

În peştera lui Platon

Celebrul filosof şi matematician britanic Alfred North Whitehead (1861 – 1947) spunea odată că „întreaga istorie a filosofiei occidentale nu e decât o serie de note de subsol la Platon".

Într-adevăr, Platon (cca. 428 – 347 î.Hr.) a fost primul care a reunit teme întinzându-se de la matematică, ştiinţă şi limbaj la religie, etică şi artă, tratându-le într-un mod unitar, care în fond a definit filosofia ca disciplină. Pentru Platon, filosofia nu era o temă abstractă ruptă de activitatea de zi cu zi, ci un îndrumar care să le spună oamenilor cum să-şi trăiască viaţa, să recunoască adevărurile şi să-şi călăuzească politica. În particular, el susţinea că prin filosofie putem ajunge la tărâmul adevărurilor aflat mult dincolo de ceea ce fie percepem cu simţurile, fie deducem prin simpla judecată comună. Cine a fost acest neobosit căutător al cunoaşterii pure, al binelui absolut şi al adevărurilor eterne?

Platon, fiul lui Ariston şi Perictione, s-a născut la Atena sau Egina. Figura 7 prezintă un bust al lui Platon, cel mai probabil copiat după un original grec mai vechi, din secolul IV î.Hr. Ambele ramuri ale familiei sale aveau o ascendenţă ilustră, incluzând figuri ca Solon, celebrul legiuitor, şi Codros, ultimul rege al Atenei. Unchiul lui Platon, Charmides, şi vărul mamei sale, Critias, erau vechi prieteni ai celebrului filosof Socrate (cca. 470 – 399 î.Hr.) – o relaţie definitorie pentru influenţa formativă la care a fost expus spiritul tânărului Platon. La început, Platon a vrut să intre în politică, dar o serie de acţiuni violente ale facţiunii care îl curta pe atunci l-au convins să renunţe. Reacţia iniţială faţă de politică pare să-l fi încurajat mai

târziu pe Platon să scrie despre formarea viitorilor păzitori ai statului. A încercat chiar (fără succes) să-l îndrume pe Dionysos al II-lea, conducătorul Siracuzei.

După execuţia lui Socrate din 399 î.Hr., Platon a început un lung periplu care s-a încheiat abia când şi-a întemeiat renumita şcoală de filosofie şi ştiinţă – Academia – pe la 387 î.Hr. Platon a condus Academia până la moarte, iar nepotul său Speusippos i-a succedat. Spre deosebire de instituţiile academice de azi, Academia era o adunare neprotocolară de intelectuali care, sub îndrumarea lui Platon, aveau o gamă largă de preocupări. Nu existau taxe şcolare, nicio programă prestabilită şi nici măcar membri permanenţi. Exista totuşi o „condiţie pentru admitere" puţin obişnuită. Potrivit unui discurs al împăratului Iulian Apostatul (secolul IV d.Hr.), o inscripţie împovărătoare atârna deasupra intrării în Academia lui Platon. Deşi textul inscripţiei nu apare în discurs, el poate fi găsit într-o însemnare din secolul IV. Inscripţia sună astfel: „Nimeni să nu intre aici, dacă nu a studiat geometria". Cum

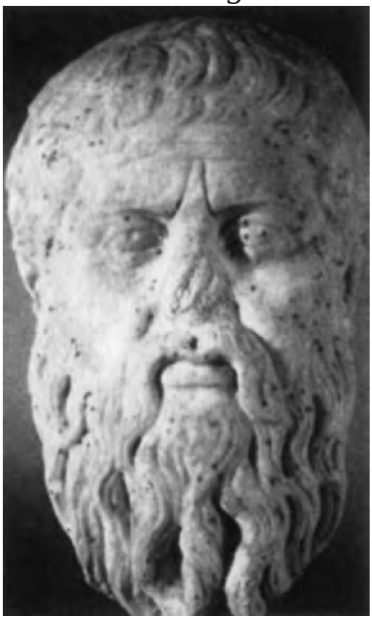


Figura 7

nu mai puţin de opt secole separă întemeierea

Academiei de prima menţiune a inscripţiei, nu putem fi absolut siguri că o asemenea inscripţie a existat într-adevăr. Nu încape însă îndoială că această cerinţă exigentă reflecta opinia lui Platon. Într-unul dintre faimoasele sale dialoguri, *Gorgias*, Platon spune: „Egalitatea geometrică este atotputernică între zei şi oameni.”[6]

„Elevii” Academiei se întreţineau, în general, singuri, iar unii dintre ei – marele Aristotel, de pildă – au rămas acolo şi douăzeci de ani. Platon considera că acest contact pe termen lung al minţilor creatoare este cel mai bun mijloc pentru apariţia unor noi idei, pe teme întinzându-se de la metafizica abstractă şi matematică la etică şi politică. Puritatea şi atributele aproape divine ale discipolilor lui Platon au fost surprinse într-un tablou intitulat

Şcoala lui Platon al pictorului simbolist belgian Jean Delville (1867 – 1953). Pentru a sublinia înzestrările spirituale ale elevilor, Delville i-a pictat goi, iar ei par a fi androgini, fiindcă aceasta se presupunea că era starea oamenilor primordiali.

Am fost dezamăgit să aflu că arheologii n-au fost în stare să găsească rămăşiţele Academiei lui Platon. Într-o călătorie în Grecia în vara lui 2007, am căutat un alt lucru care mi se pare important. Platon menţionează Porticul lui Zeus (o alee acoperită, construită în secolul V î.Hr.) ca loc favorit de conversaţie cu prietenii. Am găsit ruinele acestui portic în partea de nord-vest a vechii agore din Atena (centrul civic de pe vremea lui Platon; figura 8). Trebuie să spun că, deşi temperatura urcase la 45°C în acea zi, am simţit un frison când am păşit pe acelaşi drum pe care marele om trebuie să-l fi străbătut de sute, dacă nu de mii de ori.

Legendara inscripţie deasupra intrării în Academie vorbeşte limpede despre atitudinea lui Platon în privinţa matematicii. De fapt, cea mai mare parte a cercetării matematice semnificative din secolul al IV î.Hr. a fost efectuată de personalităţi legate, într-un fel sau altul, de

6 Platon, *Opere I,* Editura Humanitas, Bucureşti, 2001. *(N. red.)*

Academie. Platon însă nu era un matematician

Figura 8

foarte înzestrat, iar contribuţiile sale directe la cunoaşterea matematică au fost probabil minime. A fost mai curând un spectator entuziast, o sursă de motivaţie, un critic inteligent şi o călăuză inspiratoare. Philodemos, filosof şi istoric din secolul I, ne dă o imagine limpede: „În acele zile matematica a făcut mari progrese, Platon fiind arhitectul general care punea problemele, iar matematicienii le studiau cu toată râvna". Filosoful şi matematicianul neoplatonician Proclos adaugă: „Platon [...] a înaintat mult în matematică în general, şi mai cu seamă în geometrie, graţie zelului său pentru aceste studii. E îndeobşte cunoscut faptul că scrierile sale sunt presărate din belşug cu termeni matematici şi că pretutindeni încearcă să stârnească admiraţia pentru matematică printre cei ce studiază filosofia". Cu alte cuvinte, Platon, ale cărui cunoştinţe de matematică erau în genere la zi, putea discuta cu matematicienii de la egal la egal şi putea să le ofere spre rezolvare probleme, deşi realizările sale în matematică nu erau strălucite.

Altă dovadă frapantă pentru interesul lui Platon faţă de matematică apare în *Republica,* probabil opera sa cea mai împlinită, un amestec năucitor de estetică, etică, metafizică şi politică. Acolo, în cartea a VII-a, Platon (prin

figura centrală a lui Socrate) schiţează un plan ambiţios de educaţie conceput pentru a crea conducători de state utopice. Acest program riguros, dar idealizat, prevedea o pregătire încă din copilărie, împărţită între joc, gimnastică şi călătorii. După selectarea celor promiţători, programul continua cu nu mai puţin de zece ani de matematică, cinci ani de dialectică şi cincisprezece ani de experienţă practică ce presupunea comanda militară în vreme de război şi alte funcţii „potrivite pentru tineri". Platon arată de ce crede că aceasta e pregătirea necesară pentru viitorii politicieni:

Aşadar este necesar ca spre cârmuire să nu se îndrepte cei ce o îndrăgesc. Căci altminteri cârmuitorii devin rivali în iubire şi se luptă unii cu alţii. [...] Pe care alţii, deci, îi vei determina să se îndrepte spre paza cetăţii, decât pe cei care, mai întâi, sunt cei mai buni cunoscători ai condiţiilor ce fac ca o cetate să fie cel mai bine alcătuită, dar care, în plus, mai au şi alte cinstiri [decât cele politice], ca şi o viaţă mai bună decât cea politică?[7]

Îmbucurător, nu-i aşa? De fapt, deşi un asemenea program era probabil imposibil de pus în practică chiar şi pe vremea lui Platon, George Washington era de acord că educaţia în matematică şi filosofie nu era o idee rea pentru viitorii politicieni:

Ştiinţa figurilor nu e doar o cerinţă indispensabilă în orice întreprindere a unei vieţi civilizate, dar cercetarea adevărurilor matematice obişnuieşte mintea cu metoda şi corectitudinea în gândire, şi este o îndeletnicire demnă de o fiinţă raţională. Într-o stare de confuzie, în care precaritatea atâtor lucruri ne descumpăneşte, pe ea se pot întemeia facultăţile raţionale. Pornind de pe terenul ferm al demonstraţiei matematice şi filosofice, suntem conduşi pe nesimţite către speculaţii mai nobile şi meditaţii mai înalte.

În problema naturii matematicii, mai important decât Platon matematicianul sau susţinătorul matematicii a fost

---

7 Citatele din *Republica* sunt din Platon, *Opere V,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986. *(N. t.)*

Platon filosoful matematicii. Ideile sale nu numai că l-au înălţat deasupra tuturor matematicienilor şi filosofilor vremii, dar au făcut din el o figură călăuzitoare pentru următoarele milenii.

Perspectiva lui Platon asupra e ceea ce este cu adevărat matematica îşi trage obârşia din celebra alegorie a peşterii. Acolo, Platon subliniază valabilitatea îndoielnică a informaţiei furnizate de simţurile umane. Ceea ce percepem ca lume reală, spune Platon, nu e mai real decât umbrele proiectate pe pereţii unei peşteri. Acesta e remarcabilul pasaj din *Republica:*

[I] aţă mai mulţi oameni aflaţi într-o încăpere subpământeană, ca într-o peşteră, al cărei drum de intrare dă spre lumină, drum lung faţă de [lungimea] întregului peşterii. În această încăpere ei se găsesc, încă din copilărie, cu picioarele şi grumajii legate, astfel încât trebuie să stea locului şi să privească doar înainte, fără să poată să-şi rotească capetele din pricina legăturilor. Lumina vine de sus şi de departe, de la un foc aprins înapoia lor; iar între foc şi oamenii legaţi este un drum aşezat mai sus, de-a lungul căruia, iată, e zidit un mic perete, aşa cum este paravanul scamatorilor, pus dinaintea celor ce privesc, deasupra căruia îşi arată ei scamatoriile… […] [M] ai încearcă să vezi şi că, de-a lungul acestui perete, nişte oameni poartă felurite obiecte care depăşesc în înălţime zidul, mai poartă şi statui de oameni, ca şi alte făpturi de piatră sau lemn, lucrate în chipul cel mai divers. […] Căci crezi că astfel de oameni au văzut, mai întâi, din ei înşişi, cât şi din soţii lor, altceva decât umbrele care cad, aruncate de foc, pe zidul de dinaintea lor?

Potrivit lui Platon, noi, oamenii, nu ne deosebim de acei prizonieri din peşteră care iau umbrele drept realitate. (Figura 9 înfăţişează o gravură din 1604 a lui Jan Saenredam, ilustrând alegoria.) În particular, subliniază Platon, adevărurile matematice nu se referă la cercuri, triunghiuri şi pătrate care pot fi desenate pe un papirus sau trasate cu băţul pe nisip, ci la obiecte abstracte ce aparţin unei lumi ideale care e sălaşul adevăratelor forme

şi desăvârşiri. Această lume platoniciană a formelor matematice e diferită de lumea fizică, iar ea este lumea în care sunt adevărate propoziţiile matematice de genul teoremei lui Pitagora. Triunghiul dreptunghic pe care-l desenăm pe hârtie nu e decât o copie imperfectă – o aproximaţie – a triunghiului adevărat, abstract.

Altă problemă fundamentală studiată de Platon se referă la natura demonstraţiei matematice ca proces bazat pe *postulate* şi *axiome.* Axiomele sunt afirmaţii elementare a căror valabilitate se presupune a fi de la sine înţeleasă. De pildă, prima axiomă a geometriei euclidiene este: „Între oricare două puncte se poate trage o linie dreaptă". În *Republica,* Platon combină admirabil conceptul de postulat cu ideea sa privind lumea formelor matematice:

Figura 9

Cred că tu ştii că geometrii, aritmeticienii şi cei ce se îndeletnicesc cu astfel de lucruri, după ce postulează imparul şi parul, formele şi cele trei feluri de unghiuri, cât şi celelalte înrudite cu acestea, potrivit cu fiecare dintre metode, le consideră pe acestea postulate, presupunându-le cunoscute, şi nu cred de cuviinţă să le explice nici lor înşile, nici celorlalţi, socotindu-le cu totul evidente. Pornind de la acestea, parcurg tot restul şi sfârşesc prin a cădea de acord asupra chestiunii pe care intenţionează s-o

cerceteze. […] Atunci ştii şi că ei se folosesc de figuri vizibile şi că discută despre ele, fără însă a raţiona asupra lor, ci [în fapt] asupra acelor entităţi cu care figurile doar seamănă; în vederea pătratului însuşi şi a diagonalei lui discută, şi nu în vederea figurii pe care o desenează […] căutând să vadă acele realităţi ele însele, care *nu ar putea fi altfel văzute decât prin intermediul raţiunii* [s. m.].

Perspectiva lui Platon a stat la baza a ceea ce în filosofie în genere şi în dezbaterile privind natura matematicii în particular s-a numit *platonism.* Platonismul, în sensul său cel mai larg, presupune existenţa unor realităţi eterne şi imuabile, complet independente de lumea perisabilă percepută de simţurile noastre. Potrivit platonismului, existenţa reală a obiectelor matematice este un fapt obiectiv în aceeaşi măsură ca şi existenţa universului însuşi. Nu doar numerele naturale, cercurile şi pătratele există, ci şi numerele imaginare, funcţiile, fractalii, geometriile neeuclidiene şi şirurile infinite, precum şi o mulţime de teoreme legate de acestea. Pe scurt, orice noţiune matematică sau afirmaţie „obiectiv adevărată” (vom da definiţia mai târziu), formulată sau imaginată vreodată, şi o infinitate de noţiuni şi afirmaţii încă nedescoperite sunt entităţi absolute, sau *universale,* care nu pot fi nici create, nici distruse. Ele există independent de cunoaşterea noastră asupra lor. Evident, aceste obiecte nu sunt obiecte fizice – ele sălăşluiesc într-o lume autonomă a esenţelor atemporale. Platonismul îi considera pe matematicieni exploratorii unor ţinuturi străine; ei pot doar descoperi, nu şi inventa, adevărurile matematice. Aşa cum America se afla la locul ei cu mult înainte de a fi descoperită de Columb (sau de Leif Ericson), teoremele matematice existau în lumea platoniciană înainte ca babilonienii să fi început să studieze matematica. Pentru Platon, singurele lucruri care există cu adevărat şi pe deplin sunt acele forme şi idei abstracte ale matematicii, din moment ce numai în matematică, susţine el, putem dobândi o cunoaştere absolut sigură şi obiectivă. Prin urmare, în mintea lui Platon, matematica se apropie

mult de divin. În dialogul *Timaios,* zeul-creator foloseşte matematica pentru a modela lumea, iar în *Republica* cunoaşterea matematicii e considerată pasul esenţial pe calea cunoaşterii formelor divine. Platon nu foloseşte matematica pentru formularea unor legi ale naturii testabile prin experimente. Pentru el, caracterul matematic al lumii e o simplă consecinţă a faptului că „Dumnezeu face întotdeauna geometrie".

Platon îşi extinde şi spre alte discipline, în particular spre astronomie, ideile privind „formele adevărate". El susţine că în adevărata astronomie „trebuie să lăsăm cerul în pace" şi să nu încercăm să dăm seamă de aranjarea şi mişcările aparente ale stelelor vizibile. Platon privea în schimb adevărata astronomie ca pe o ştiinţă ce se ocupă de legile de mişcare într-o lume ideală, matematică, pentru care cerul observabil nu e decât o ilustrare (la fel cum figurile geometrice desenate pe papirus ilustrează doar figurile adevărate).

Propunerile lui Platon privind cercetările astronomice sunt îndoielnice chiar şi pentru unii dintre cei mai devotaţi platonicieni. Apărătorii ideilor sale susţin că de fapt Platon nu vrea să spună că astronomia trebuie să se ocupe de un cer ideal care n-are nicio legătură cu cel observabil, ci că trebuie să se ocupe de mişcările reale ale corpurilor cereşti, iar nu de mişcările aparente, aşa cum se văd ele de pe Pământ. Alţii subliniază totuşi că adoptarea *ad litteram* a spuselor lui Platon a împiedicat serios dezvoltarea astronomiei observaţionale ca ştiinţă. Indiferent de interpretarea atitudinii lui Platon faţă de astronomie, platonismul a devenit dogma centrală în privinţa bazelor matematicii.

Există însă cu adevărat lumea platoniciană a matematicii? Şi dacă există, unde se află? Şi ce sunt afirmaţiile „obiectiv adevărate" care populează această lume? Oare matematicienii care aderă la platonism exprimă pur şi simplu acelaşi gen de credinţă romantică atribuită marelui artist renascentist Michelangelo? Potrivit legendei, Michelangelo credea că minunatele sale

sculpturi existau deja înăuntrul blocurilor de marmură şi că rolul lui era doar de a le scoate la iveală.

Platonicienii de azi (da, există, iar ideile lor vor fi prezentate mai amănunţit în capitolele următoare) insistă asupra faptului că lumea platoniciană a formelor matematice este reală, şi aduc exemple concrete, din punctul lor de vedere, de afirmaţii matematice obiectiv adevărate din acea lume.

Să considerăm următoarea propoziţie uşor de înţeles: fiecare întreg par mai mare decât 2 poate fi scris ca suma a două numere prime (numere divizibile numai prin unu şi ele însele). Această afirmaţie care sună simplu este aşa-numita conjectură a lui Goldbach, pentru că o conjectură echivalentă apare în scrisoarea matematicianului amator prusac Christian Goldbach (1690 – 1764) din 7 iunie 1742. Putem uşor verifica validitatea acestei conjecturi pentru primele numere pare: 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7 (sau 5 + 5), 12 = 5 + 7, 14 = 3 + 11 (sau 7 + 7), 16 = 5 + 11 (sau 3 + 13) etc. Această afirmaţie e atât de simplă, încât matematicianul englez G.H. Hardy a declarat că „orice prost putea s-o ghicească”. De fapt, marele matematician şi filosof René Descartes anticipase această conjectură înaintea lui Goldbach. În schimb, demonstrarea acestei conjecturi s-a dovedit a fi cu totul altă poveste. În 1996, matematicianul chinez Chen Jingrun a făcut un mare pas înainte pe calea demonstraţiei. El a reuşit să arate că orice întreg par suficient de mare este suma a două numere dintre care unul este prim, iar al doilea are cel mult doi factori primi. Înainte de sfârşitul lui 2005, cercetătorul portughez Tomás Oliveira e Silva demonstrase adevărul conjecturii pentru numere până la 3 x 1017 (trei sute de mii de trilioane). Cu toate acestea, în pofida eforturilor imense depuse de mulţi matematicieni de talent, demonstraţia generală ne scapă deocamdată. Nici măcar tentaţia suplimentară a premiului de 1 milion de dolari oferit între 20 martie 2000 şi 20 martie 2002 (pentru a face publicitate romanului intitulat *Unchiul*

Petros şi conjectura lui Goldbach[8]) n-a produs rezultatul dorit. Aici intervine însă problema delicată a sensului „adevărului obiectiv" în matematică. Să presupunem că o demonstraţie riguroasă va fi formulată în 2016. Vom putea atunci spune că afirmaţia era deja adevărată atunci când Descartes s-a gândit la ea prima dată? Majoritatea oamenilor vor fi acord că întrebarea e prostească. Evident, dacă propoziţia se dovedeşte a fi adevărată, atunci a fost *întotdeauna* adevărată, chiar şi înainte să ştim că e adevărată. Sau, să luăm alt exemplu aparent nevinovat, aşa-numita *conjectură a lui Catalan.* Numerele 8 şi 9 sunt numere întregi consecutive, iar fiecare este egal cu puterea întreagă a unui număr întreg, adică 8 = 23 şi 9 = 32. În 1844, matematicianul belgian Eugène Charles Catalan (1814 – 1894) a făcut următoarea conjectură: între toate puterile posibile ale numerelor întregi, singura pereche de numere consecutive (cu excepţia lui 0 şi 1) este 8 şi 9. Cu alte cuvinte, ne putem petrece viaţa aşternând pe hârtie toate puterile întregi ale numerelor întregi, iar în afară de 8 şi 9 nu vom găsi alte două numere care să difere numai prin 1. În 1342, matematicianul şi filosoful evreu francez Levi Ben Gerson (1288 – 1344) a demonstrat o mică parte a conjecturii – anume că 8 şi 9 sunt singurele puteri ale lui 2 şi 3 care diferă prin 1. Un mare pas înainte a fost făcut de matematicianul Robert Tijdeman în 1976. Demonstrarea formei generale a conjecturii lui Catalan i-a chinuit pe cei mai mari matematicieni timp de peste 150 de ani. În sfârşit, matematicianul român Preda Mihăilescu a prezentat o demonstraţie completă a conjecturii pe 18 aprilie 2002. Demonstraţia sa a fost publicată în 2004 şi este acum deplin acceptată. Din nou ne putem întreba: când a devenit adevărată conjectura lui Catalan? În 1342? În 1844? În 1976? În 2002? În 2004? Nu este evident că afirmaţia a fost întotdeauna adevărată, doar că noi n-am ştiut că era adevărată? Acestea sunt tipurile de adevăruri platoniciene pe care le numim „adevăruri obiective".

8 Romanul a apărut în româneşte la Editura Humanitas, în colecţia „Cartea de pe noptieră". *(N. t.)*

Unii matematicieni, filosofi, specialişti în ştiinţele cognitive şi alţi „consumatori" de matematică (de pildă, informaticienii) consideră că lumea platoniciană ţine de imaginaţia unor minţi prea visătoare (voi prezenta în detaliu această perspectivă ceva mai târziu). În 1940, faimosul istoric al matematicii Eric Temple Bell (1883 – 1960) a făcut următoarea predicţie:

Potrivit profeţilor, ultimul adept al idealului platonic în matematică se va fi alăturat dinozaurilor înainte de anul 2000. Despuiată de veşmintele mitice ale caracterului etern, matematica va fi atunci recunoscută drept ceea ce a fost dintotdeauna, un limbaj construit omeneşte, născocit de oameni în scopuri precise, stabilite de ei înşişi. Ultimul templu al unui adevăr absolut se va fi evaporat odată cu nimicul pe care-l păstra cu sfinţenie.

Profeţia lui Bell s-a dovedit greşită. Deşi au apărut dogme diametral opuse platonismului, ele nu au cucerit pe deplin minţile (şi inimile) tuturor matematicienilor şi filosofilor, care rămân şi astăzi la fel de divizaţi ca întotdeauna.

Să presupunem totuşi că ar fi învins platonismul şi că am fi devenit cu toţii platonicieni cu trup şi suflet. Explică oare platonismul „imprevizibila eficacitate" a matematicii în descrierea lumii înconjurătoare? Nu tocmai. De ce ar trebui ca realitatea fizică să se comporte potrivit unor legi din lumea platoniciană abstractă? Acesta e unul dintre misterele evocate de Penrose, iar Penrose este el însuşi un platonician convins. Aşa încât, deocamdată, chiar de-ar fi să îmbrăţişăm platonismul, trebuie să acceptăm că misterul forţei matematicii rămâne nelămurit. După cum spunea Wigner, „Este greu de evitat impresia că suntem confruntaţi aici cu un miracol frapant, comparabil cu miracolul care face ca mintea umană să lege laolaltă o mie de raţionamente fără a ajunge la contradicţii".

Pentru a înţelege pe deplin amploarea acestui miracol, trebuie să cercetăm vieţile şi contribuţiile celor care au înfăptuit miracolul – minţile aflate în spatele descoperirii câtorva dintre aceste incredibil de precise legi

ale naturii.

Capitolul 3

Magicienii: Maestrul şi ereticul

Spre deosebire de Cele Zece Porunci, ştiinţa nu a fost înmânată omenirii pe impresionante tăbliţe de piatră. Istoria ştiinţei e istoria măririi şi decăderii a numeroase speculaţii, ipoteze şi modele. Multe idei aparent ingenioase s-au dovedit a fi false începuturi sau au sfârşit în impas. Unele teorii considerate bătute în cuie au fost mai târziu infirmate de testul dur al experimentelor şi observaţiilor, pentru a deveni complet depăşite. Nici măcar extraordinara capacitate intelectuală a creatorilor unor sisteme de gândire nu le-a făcut pe acestea imune la înlocuire. Marele Aristotel, de pildă, credea că pietrele, merele şi alte obiecte grele cad pentru că îşi caută locul firesc, care e centrul Pământului. Pe măsură ce se apropie de sol, susţinea Aristotel, aceste corpuri îşi sporesc viteza pentru că sunt fericite să se întoarcă acasă. Pe de altă parte, aerul (şi focul) se deplasează în sus pentru că locul firesc al aerului se află între sferele cereşti. Tuturor obiectelor li se poate atribui o natură, pe baza relaţiilor cu constituenţii elementari – pământ, foc, aer şi apă. După cum spunea Aristotel.

Printre fiinţe, unele există prin natură, altele există prin alte cauze; prin natură există [...] corpurile simple, cum sunt pământul, focul, aerul şi apa [...]. Toate aceste lucruri menţionate se vede că se deosebesc de cele care nu există prin natură. Astfel, lucrurile care există prin natură, toate, se vede că au în ele însele un principiu de mişcare şi repaus [...] natura este cauza şi principiul mişcării şi repausului pentru lucrul în care se afla mai întâi în sine, şi nu prin accident.

[...] Iar lucrurile conforme naturii sunt şi aceste substanţe, şi atributele lor, de exemplu, cum este pentru foc transportul în sus.[9]

Aristotel a încercat chiar să formuleze o lege cantitativa a mişcării. A afirmat că obiectele mai grele cad

9 Aristotel, *Fizica,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966. *(N. t.)*

mai repede, viteza fiind direct proporţională cu greutatea (se presupunea că un obiect de două ori mai greu decât altul avea să cadă cu o viteză de două ori mai mare). Dacă experienţa de zi cu zi făcea ca această lege să pară rezonabilă – putea fi observat cum o cărămidă atingea solul mai repede decât o pană lăsată să cadă de la aceeaşi înălţime –, Aristotel nu a examinat totuşi niciodată cu mai multă atenţie această afirmaţie cantitativă. Fie nu i-a trecut prin minte, fie nu a considerat necesar să verifice dacă două cărămizi lipite între ele cad de două ori mai repede decât una singură. Galileo Galilei (15641642), mult mai orientat spre matematică şi experiment şi dovedind prea puţin respect pentru fericirea cărămizilor şi merelor în cădere, a fost primul care a arătat că Aristotel înţelesese problema complet greşit. Folosind un experiment mintal ingenios, Galilei a demonstrat că legea lui Aristotel n-avea niciun sens, pentru că era inconsecventă din punct de vedere logic. Argumentul era următorul: să presupunem că legăm două obiecte. Cât de repede va cădea obiectul combinat în comparaţie cu fiecare dintre cei doi constituenţi ai săi? Pe de o parte, potrivit legii lui Aristotel, am putea trage concluzia că va cădea cu o viteză intermediară, pentru că obiectul mai uşor îl va frâna pe cel mai greu. Pe de altă parte, dat fiind că obiectul combinat este mai greu decât componentele sale, ar trebui să cadă chiar mai repede decât cel mai greu dintre ele, ceea ce conduce la o contradicţie evidentă. Singurul motiv pentru care o pană cade pe pământ mai lin decât o cărămidă este rezistenţa mai mare din partea aerului resimţită de pană – dacă ambele ar fi lăsate să cadă de la aceeaşi înălţime în vid, ar ajunge simultan la sol. Acest fapt a fost demonstrat de numeroase experienţe, dintre care cea mai spectaculoasă îi aparţine astronautului David Randolph Scott în misiunea Apollo 15. Scott – al şaptelea om care a păşit pe Lună – a lăsat să cadă simultan un ciocan dintr-o mână şi o pană din alta. Cum Luna e aproape lipsită de atmosferă, ciocanul şi pana au atins suprafaţa lunară în acelaşi timp.

Nu e uimitor că legea de mişcare a lui Aristotel era greşită, ci faptul că a fost acceptată timp de aproape două mii de ani. Cum a putut o idee eronată să se bucure de asemenea longevitate? Este un caz de „furtună perfectă” – trei forţe a căror combinaţie creează o doctrină inatacabilă. Întâi, faptul simplu că în absenţa măsurătorilor, legea lui Aristotel părea să fie în acord cu experienţa bazată pe bun-simţ – foile de papirus pluteau prin aer, în timp ce bucăţile de plumb nu. A fost nevoie de geniul lui Galilei pentru a afirma că bunul-simţ putea fi înşelător. În al doilea rând, era ponderea colosală a reputaţiei şi autorităţii lui Aristotel ca savant. În fond, el era cel care pusese bazele unei mari părţi a culturii intelectuale occidentale. Fie că era vorba despre cercetarea tuturor fenomenelor naturale sau despre principiile de bază ale eticii, metafizicii, politicii şi artei, Aristotel lămurise problema. Şi asta nu era tot. Într-un fel, Aristotel ne-a învăţat chiar *cum* să gândim, scriind primele studii de logică. Astăzi, aproape orice copil de şcoală recunoaşte sistemul practic complet al deducţiei logice iniţiat de Aristotel şi cunoscut ca *silogism*:

1. Toţi grecii sunt oameni.
2. Toţi oamenii sunt muritori.
3. Prin urmare, toţi grecii sunt muritori.

Al treilea motiv al incredibilei longevităţi a teoriei aristoteliciene incorecte era faptul că biserica creştină o integrase în propria sa dogmă. Această împrejurare a avut un efect descurajant asupra mai tuturor încercărilor de a pune la îndoială afirmaţiile lui Aristotel.

În ciuda impresionantelor sale contribuţii la sistematizarea logicii deductive, Aristotel nu a fost remarcat pentru contribuţiile sale matematice. Poate părea surprinzător, dar omul care a întemeiat în fond ştiinţa ca demers organizat nu era prea preocupat (în niciun caz la fel de mult ca Platon) de matematică şi a fost mai curând slab la fizică. Chiar dacă Aristotel a recunoscut importanţa relaţiilor numerice şi geometrice în ştiinţă, el a continuat să considere matematica o disciplină abstractă,

ruptă de realitatea fizică. Prin urmare, deşi nu încape îndoială că a fost o forţă intelectuală, Aristotel *nu* se află pe lista mea de „magicieni" ai matematicii.

Folosesc aici termenul „magicieni" pentru aceia care au putut scoate iepuri din pălării cu adevărat goale, pentru aceia care au descoperit legături între matematică şi natură, la care nimeni nu se gândise înainte, pentru aceia care au putut observa fenomene naturale complexe din care au distilat legi matematice de limpezimea cristalului. În unele cazuri, aceşti remarcabili gânditori s-au folosit chiar de experimente şi observaţii în elaborarea matematicii lor. Problema imprevizibilei eficacităţi a matematicii în explicarea naturii nu s-ar fi ivit niciodată dacă nu ar fi existat aceşti magicieni – el s-a născut direct din formidabilele descoperiri ale acestor cercetători.

Nicio carte nu face dreptate tuturor oamenilor de ştiinţă şi matematicienilor care au contribuit la înţelegerea universului. În acest capitol şi în următorul, intenţionez să vorbesc doar despre patru titani din secolele trecute, al căror statut de magicieni nu poate fi pus la îndoială – o parte din *crème de la crème* a lumii ştiinţifice. Ne amintim de primul magician de pe lista mea din pricina unei împrejurări mai curând neobişnuite – umbla gol pe străzile oraşului său natal.

Daţi-mi un punct de sprijin, şi voi urni Pământul din loc

Atunci când istoricul matematicii Eric Temple Bell a trebuit să aleagă numele primilor trei matematicieni, el a spus:

Orice listă a celor trei „cei mai mari" matematicieni din istorie trebuie să includă numele lui Arhimede. Ceilalţi doi care i se alătură sunt, de obicei, Newton (1642 – 1727) şi Gauss (1777 – 1855). Unii, considerând relativa bogăţie – sau sărăcie – a matematicii şi fizicii din epocile când au trăit aceşti titani, şi judecând realizările lor în raport cu ceea ce se ştia pe atunci, l-ar pune primul pe Arhimede.

Arhimede (287 – 212 î.Hr.; figura 10 înfăţişează un bust presupus a-l reprezenta pe Arhimede, dar care poate

fi al unui rege spartan) a fost într-adevăr echivalentul lui Newton sau Gauss la acea vreme; un om atât de strălucit, cu atâta imaginaţie şi pătrundere, încât deopotrivă contemporanii şi generaţiile ulterioare i-au proslăvit numele. Deşi e mai cunoscut pentru ingenioasele sale invenţii inginereşti, Arhimede a fost în primul rând matematician, iar matematica lui era cu secole înaintea epocii sale. Din păcate, se ştie puţin despre copilăria lui Arhimede şi despre familia sa. Prima biografie, scrisă de un anume Heraclid, nu s-a păstrat, iar puţinele detalii pe care le cunoaştem despre viaţa şi moartea sa violentă provin în primul rând din scrierile istoricului roman Plutarh. Plutarh (cca. 46 – 120 d.Hr.) era, de fapt, mai interesat de isprăvile militare ale generalului roman Marcellus, care cucerise oraşul natal al lui Arhimede, Siracuza, în 212 î.Hr. Din fericire pentru istoria matematicii, Arhimede i-a provocat atâtea dureri de cap lui Marcellus pe durata asediului Siracuzei, încât trei istorici importanţi ai acelei perioade, Plutarh, Polybios şi Titus Livius, nu l-au putut ignora.

Arhimede s-a născut la Siracuza, pe atunci aşezare grecească în Sicilia. Potrivit propriei sale mărturii, era fiul astronomului Phidias, despre care se cunoaşte puţin în afara faptului că a estimat raportul dintre diametrul Soarelui şi cel al Lunii. Arhimede poate că se înrudea şi cu regele Hieron al II-lea, fiul nelegitim al unui nobil (şi al uneia dintre sclavele acestuia). Indiferent de legăturile lui Arhimede cu familia regală, atât regele, cât şi fiul său, Gelon, i-au arătat întotdeauna multă preţuire. În tinereţe, Arhimede petrece un timp la Alexandria, unde studiază matematica, înainte de a se întoarce la o viaţă închinată studiului, la Siracuza.

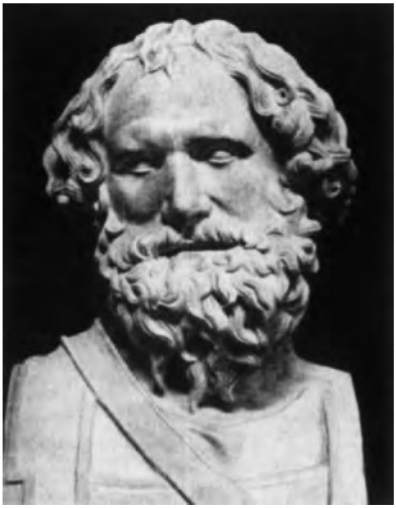


Figura 10

Arhimede era un matematician pur sânge. Potrivit lui Plutarh, „socotind că […] tot meşteşugul care se amesteca cu folosul este lipsit de nobleţe şi josnic, el şi-a pus toată râvna numai în studierea acelor lucruri care nu amestecă frumosul şi gloria cu folosul şi care sunt de necomparat cu celelalte”.[10] Interesul lui Arhimede pentru matematica abstractă şi gradul în care era mistuit de aceasta păreau să depăşească cu mult entuziasmul îndeobşte afişat de practicanţii acestei discipline. Din nou, potrivit lui Plutarh:

parcă fermecat de un fel de sirenă proprie şi înnăscută, uita de mâncare şi neglija îngrijirea corpului, iar, de multe ori, când era dus cu sila la unsoare şi la baie, desena figuri geometrice pe vatră şi pe corpul său uns, trăgea drepte cu degetul, fiind stăpânit de o mare plăcere şi cu adevărat fermecat de muze.

În ciuda dispreţului său pentru matematica aplicată şi a desconsiderării ideilor inginereşti, ingenioasele sale invenţii, iar nu geniul matematic, l-au făcut celebru.

Cea mai cunoscută legendă privitoare la Arhimede îi întăreşte imaginea-clişeu de matematician cu capul în nori.

---

10 Pentru acest citat şi următoarele, Plutarh, *Vieţi paralele* II, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1963. *(N. red.)*

Această poveste amuzantă a fost relatată pentru prima dată de arhitectul roman Vitruviu în secolul I î. Cr, şi ea sună astfel: regele Hieron voia să aducă ofrandă zeilor o coroană de aur. Când i-a fost adusă coroana, ea cântărea cât aurul necesar fabricării sale. Totuşi, regele era bănuitor, temându-se că o parte din aur fusese înlocuit cu argint de aceeaşi greutate. Neputându-şi justifica neîncrederea, regele s-a adresat maestrului între matematicieni – Arhimede. Într-o zi, continuă legenda, Arhimede a intrat în baie, încă preocupat de problema dezvăluirii posibilei fraude. Cufundându-se în apă, şi-a dat seama că trupul său dislocase un anumit volum de apă care se revărsase peste marginea căzii. Acest lucru a declanşat imediat o soluţie în mintea sa. Copleşit de bucurie, Arhimede a sărit din cadă alergând gol în stradă şi urlând *„Evrika, Evrika!”* („Am găsit, am găsit!”).[11]

Altă exclamaţie faimoasă a lui Arhimede „Daţi-mi un punct de sprijin, şi voi urni Pământul din loc!” figurează în prezent (într-o versiune sau alta) în peste 150.000 de pagini de pe Internet găsite la o căutare pe Google. Această declaraţie îndrăzneaţă, care sună aproape ca sloganul unei mari companii, a fost citată de Thomas Jefferson, Mark Twain, John F. Kennedy şi apare chiar şi într-o poezie a lui Byron. Fraza cu pricina pare să fi marcat apogeul cercetărilor lui Arhimede în problema deplasării unei greutăţi date cu ajutorul unei forţe date. Plutarh ne spune că, atunci când regele Hieron a cerut o demonstraţie practică a capacităţii lui Arhimede de a mânui o greutate mare folosind o forţă mică, Arhimede a reuşit – folosind un sistem de scripeţi – să lanseze la apă o corabie încărcată. Plutarh adaugă cu admiraţie „a tras corabia uşor şi fără zguduire, ca şi când ar fi lunecat pe mare”. Versiuni uşor modificate ale aceleiaşi legende apar şi în alte surse. Deşi e greu de crezut că Arhimede a putut deplasa efectiv o întreagă corabie folosind dispozitivele

11 Astfel, volumul de apă dislocat de coroana de aur pur ar fi fost mai mare decât cel al coroanei contrafăcute, argintul fiind mai puţin dens decât aurul. (*N.. t.)*

mecanice disponibile la acea vreme, legendele lasă puţină îndoială asupra faptului că a făcut o demonstraţie impresionantă cu o invenţie prin care putea manevra greutăţi mari.

Arhimede a realizat multe alte invenţii pe timp de pace, de pildă şurubul hidraulic pentru ridicarea apei şi un planetariu care demonstra mişcările corpurilor cereşti, dar, în Antichitate, a devenit celebru prin rolul jucat în apărarea Siracuzei împotriva romanilor.

Istoricilor le-au plăcut întotdeauna războaiele, aşa încât există numeroase cronici despre asediul Siracuzei din 214 – 212 î.Hr. Generalul roman Marcus Claudius Marcellus (cca. 268 – 208 î.Hr.), bucurându-se pe-atunci de o mare faimă militară, prevedea o victorie rapidă. Se pare că nu l-a luat în calcul pe încăpăţânatul rege Hieron, secondat de un geniu matematic şi ingineresc. Plutarh ne dă o descriere vie a prăpădului provocat de maşinăriile lui Arhimede în rândurile romanilor:

[…] Arhimede a deschis maşinile şi pe pedeştri îi întâmpinau în acelaşi timp tot felul de săgeţi şi de pietre enorme, zburând cu un vâjâit şi cu o iuţeală de necrezut şi nimeni nu le putea suporta greutatea, în timp ce ele răsturnau pe cei asupra cărora cădeau şi puneau în dezordine liniile de atac.

În partea mării, cârlige aşezate pe ziduri dădeau la fund unele corăbii izbindu-le de sus, cu greutate; pe altele le apucau de proră cu cângi de fier sau cu ciocuri de fier, asemănătoare cu ale cocorilor, şi, sprijinindu-le de pupă, le scufundau. […] De multe ori o corabie era ridicată de la suprafaţa mării sus şi se învârtea, spânzurată în aer, oferind o privelişte înfiorătoare, până când oamenii de pe ea se aruncau jos şi erau străpunşi de săgeţi, iar corabia cădea goală peste ziduri sau alături, când maşinile îi dădeau drumul.

Dispozitivele lui Arhimede provocau o spaimă cumplită: „romanii erau atât de cuprinşi de frică, încât, dacă zăreau vreo frânghie sau vreun lemn apărând pe zid, strigau că Arhimede pune în mişcare vreo maşină

împotriva lor şi se întorceau urlând şi fugeau […]”. Până şi Marcellus era profund impresionat, plângându-se în faţa echipei sale de ingineri militari: „Cum vom duce la capăt lupta împotriva acestui Briareos [uriaş cu o sută de braţe, fiu al lui Uranus şi al Gaiei] geometru care, şezând pe ţărmul mării şi jucându-se, ne-a azvârlit corăbiile […] şi care întrece pe hecantonchiri [uriaşii cu o sută de braţe] aruncând atâtea arme împotriva noastră?”

Potrivit altei cunoscute legende care apare prima dată în scrierile medicului grec Galen (129 – 200), Arhimede a folosit un sistem de oglinzi pentru a focaliza razele Soarelui ca să ardă corăbiile romane. Anthemios din Tralles, arhitect bizantin din secolul VI, şi câţiva istorici din secolul XII au reluat această povestire fantastică, dar înfăptuirea efectivă a unei asemenea isprăvi rămâne nesigură. Toate aceste poveşti aproape mitologice ne arată însă câtă veneraţie a inspirat „cel înţelept” generaţiilor ulterioare.

După cum am observat mai sus, Arhimede însuşi – mult-preţuitul „Briareos geometru” – nu acorda vreo importanţă jucăriilor sale militare; le privea de fapt ca pe nişte amuzamente geometrice. Din păcate, această atitudine distantă l-a costat în cele din urmă viaţa. Când romanii au pus în fine stăpânire pe Siracuza, Arhimede era atât de preocupat să deseneze figuri geometrice pe o tăbliţă cu nisip, încât n-a remarcat tumultul războiului. Potrivit unor relatări, atunci când un soldat roman i-a ordonat lui Arhimede să-l urmeze la Marcellus, bătrânul geometru a răspuns indignat: „Nu te atinge de cercurile mele!” Răspunsul l-a înfuriat pe soldat în asemenea hal încât, neascultând de ordinele precise ale comandantului, şi-a scos sabia din teacă şi l-a răpus pe cel mai mare matematician al Antichităţii. Figura 11 înfăţişează o reproducere (din secolul XVIII) a unui mozaic găsit la Herculanum, înfăţişând ultimele clipe ale vieţii „maestrului”.

Moartea lui Arhimede a marcat, într-un fel, sfârşitul unei epoci extraordinar de bogate din istoria matematicii.

După cum observa matematicianul şi istoricul britanic Alfred North Whitehead.

Moartea lui Arhimede, ucis de un soldat roman, este simbolică pentru o transformare profundă a lumii. Romanii au fost un mare popor, dar purtau stigmatul sterilităţii care însoţeşte spiritul practic. Nu erau destul de visători pentru a ajunge la noi perspective, care i-ar fi ajutat să stăpânească mai bine forţele naturii. Niciun roman nu şi-a pierdut viaţa pentru că era absorbit în contemplarea unor figuri matematice.

Din fericire, dacă detaliile privind viaţa lui Arhimede sunt puţine, multe (dar nu toate) dintre incredibilele sale scrieri au supravieţuit. Arhimede avea obiceiul să trimită note despre descoperirile sale matematice câtorva prieteni matematicieni sau oamenilor pe care îi respecta. Lista corespondenţilor săi îi include (printre alţii) pe

Figura 11

astronomul Conon din Samos, pe matematicianul Eratostene din Cyrène şi pe fiul regelui, Gelon. După moartea lui Conon, Arhimede i-a trimis câteva note elevului lui Conon, Dositheos din Pelusium.

Cercetările lui Arhimede acoperă un spectru uimitor

din matematică şi fizică. Între altele, a găsit metode generale de determinare a ariilor pentru diverse figuri plane şi a volumelor mărginite de tot soiul de suprafeţe curbe – de exemplu, ariile cercului, ale segmentelor de parabolă şi de spirală, volumele segmentelor de cilindru, con, precum şi ale altor corpuri generate de rotaţia parabolei, elipsei şi hiperbolei. A arătat că valoarea numărului n, raportul dintre circumferinţa şi diametrul unui cerc, trebuie să fie mai mare decât 3 şi 10/71 şi mai mică decât 3 şi 1/7. Pe vremea când nu exista nicio metodă de reprezentare a numerelor foarte mari, a inventat un sistem care îi permitea nu numai să le scrie, dar şi să opereze cu ele, oricât ar fi fost de mari. În fizică, Arhimede a descoperit legile plutirii corpurilor, punând astfel bazele hidrostaticii. În plus, a calculat centrele de greutate pentru numeroase corpuri şi a formulat legile mecanice ale pârghiilor. În astronomie, a făcut observaţii pentru a determina durata anului şi distanţele până la planete.

Studiile multor matematicieni greci se caracterizau prin originalitate şi meticulozitate, dar metodele de raţionament şi de rezolvare ale lui Arhimede îl distingeau de toţi savanţii epocii sale. Daţi-mi voie să vă prezint trei exemple reprezentative care vă pot da o idee despre inventivitatea lui Arhimede. La prima vedere, unul dintre ele pare să nu fie decât o curiozitate amuzantă, dar o privire mai atentă dezvăluie ascuţimea minţii sale. Celelalte două exemple privind metodele lui Arhimede demonstrează de asemenea o gândire atât de avansată faţă de epoca sa, încât îl ridică imediat pe Arhimede la rangul de „magician”.

Arhimede era fascinat de numerele mari. Dar numerele foarte mari sunt incomod de exprimat cu notaţii obişnuite (încercaţi să completaţi un cec de 8, 4 bilioane de dolari, datoria naţională a Statelor Unite pe 6 iulie 2006, în spaţiul alocat sumei în cifre). Astfel, Arhimede a creat un sistem care îi permitea să reprezinte numere cu 80.000 de bilioane de cifre. A folosit acest sistem într-un tratat original intitulat *Arenarium*, pentru a dovedi că

numărul total de fire de nisip din lume nu e infinit.

Chiar şi introducerea la acest tratat este atât de edificatoare încât o voi reproduce parţial aici (tratatul îi era în întregime dedicat lui Gelon, fiul regelui Hieron al II-lea):

Unii cred, rege Gelon, că numărul firelor de nisip este infinit; şi înţeleg prin nisip nu numai acela care există în preajma Siracuzei şi în restul Siciliei, dar şi cel ce se găseşte în toate regiunile locuite şi nelocuite. Fără a-l considera infinit, sunt iarăşi unii care cred că nu a fost numit încă un număr suficient de mare pentru a depăşi mulţimea firelor de nisip. Şi este limpede că cei care susţin aceasta, dacă şi-ar închipui o cantitate de nisip la fel de mare ca Pământul, cuprinzând toate mările şi adânciturile pământului umplute până la o înălţime egală cu cea a celor mai înalţi munţi, ar fi încă foarte departe de a recunoaşte că poate fi exprimat orice număr care depăşeşte mulţimea nisipului astfel considerat. Dar voi încerca să arăt, folosindu-mă de demonstraţii geometrice pe care le veţi putea urmări, că, printre numerele numite de mine şi date în lucrarea pe care i-am trimis-o lui Zeuxippos [lucrare pierdută, din păcate], unele depăşesc nu doar numărul reprezentând cantitatea de nisip egală ca mărime cu Pământul umplut aşa cum am arătat, dar şi cantitatea egală cu mărimea universului. Ştiţi că „univers” este numele dat de majoritatea astronomilor sferei al cărei centru este centrul Pământului şi a cărei rază este egală cu linia dreaptă care uneşte centrul Soarelui cu centrul Pământului. Aceasta este versiunea obişnuită, aşa cum o veţi fi auzit de la astronomi. Dar Aristarh din Samos a scos o carte conţinând unele ipoteze în care premisele conduc la rezultatul că universul este cu mult mai mare decât ceea ce numim acum univers. Ipotezele sale spun că stelele fixe şi Soarele rămân în repaus, că Pământul se roteşte în jurul Soarelui pe circumferinţa unui cerc, având Soarele în centrul orbitei.

Această introducere scoate imediat în evidenţă două idei importante: (1) Arhimede era pregătit să pună la

îndoială chiar şi credinţe foarte răspândite (de pildă, existenţa unei infinităţi de fire de nisip) şi (2) trata cu respect teoria heliocentrică a astronomului Aristarh (el corecta de fapt în tratatul său una dintre ipotezele lui Aristarh). În universul lui Aristarh, Pământul şi planetele se învârteau în jurul unui Soare fix, plasat în centru (amintiţi-vă că acest model a fost propus cu 1800 de ani înainte de Copernic!). După aceste observaţii preliminare, Arhimede abordează problema firelor de nisip, avansând printr-o serie de paşi logici. Întâi estimează câte fire de nisip aşezate unul lângă altul sunt necesare pentru a acoperi diametrul unei seminţe de mac. Apoi, câte seminţe de mac ar acoperi lăţimea unui deget, câte degete sunt într-un stadiu (aproximativ 200 m) şi pe urmă în 10 miliarde de stadii. Pe drum, Arhimede inventează un sistem de indici şi o notaţie care, atunci când sunt combinate, permit clasificarea numerelor uriaşe. Presupunând că sfera stelelor fixe e mai mică decât de zece milioane de ori sfera care conţine orbita Soarelui (aşa cum se vede de pe Pământ), Arhimede găseşte că numărul firelor de nisip din universul umplut-ochi cu nisip este mai mic decât 1063 (unu urmat de şaizeci şi trei de zerouri). Încheie apoi tratatul adresându-se cu respect lui Gelon:

Înţeleg, rege Gelon, că aceste lucruri vor părea de necrezut pentru marea majoritate a oamenilor care nu au studiat matematica, dar celor cunoscători şi care au studiat problema distanţelor şi dimensiunilor Pământului, Soarelui şi Lunii, precum şi a întregului univers, demonstraţia le va părea convingătoare. De aceea m-am gândit că nu e nepotrivit să vă supun atenţiei acest subiect.

Frumuseţea *Arenarium*-ului constă în uşurinţa cu care Arhimede sare de la obiectele de zi cu zi (seminţe de mac, nisip, degete) la numere abstracte şi notaţii matematice, apoi de la acestea la dimensiunile sistemului solar şi universului în întregul său. Evident, Arhimede poseda o asemenea flexibilitate intelectuală, încât putea cu uşurinţă folosi matematica pentru a descoperi proprietăţi

necunoscute ale universului, şi putea folosi caracteristici cosmice pentru a elabora concepte aritmetice.

Arhimede mai poate fi numit „magician” şi pentru metoda prin care a ajuns la multe dintre remarcabilele sale teoreme de geometrie. Până în secolul XX s-a ştiut foarte puţin despre această metodă şi despre felul în care raţiona Arhimede în general. Stilul său concis nu lăsa să se întrevadă prea multe indicii. Apoi, în 1906, o descoperire spectaculoasă ne-a făcut să pătrundem în mintea acestui geniu. Povestea acestei descoperiri seamănă atât de mult cu un roman istoric poliţist de Umberto Eco, încât mă simt obligat să fac un scurt ocol pentru a o istorisi.

Palimpsestul lui Arhimede

Cândva în secolul X, un scrib anonim din Constantinopol a copiat trei lucrări importante ale lui Arhimede: *Metoda, Stomachion* şi *Despre corpurile care plutesc.* Această activitate ţinea pesemne de interesul general faţă de matematica greacă, în mare măsură trezit de Leon Geometrul, matematician din secolul IX. În 1204, soldaţii celei de-a patra Cruciade au devastat Constantinopolul – în anii următori pasiunea pentru matematică a pălit, iar schisma dintre Biserica Catolică din Apus şi Biserica Ortodoxă din Răsărit a devenit un fapt împlinit. Cândva înainte de 1229, manuscrisul conţinând lucrările lui Arhimede a fost supus unei acţiuni catastrofale de reciclare – a fost dezlegat şi spălat, astfel încât foile de pergament să poată fi refolosite pentru o carte de rugăciuni creştină. Copistul Ioannes Myronas a terminat de copiat cartea de rugăciuni pe 14 aprilie 1229. Din fericire, spălarea textului original nu a şters complet scrierea iniţială. Prin secolul XVI, palimpsestul – documentul reciclat – ajunsese cumva în Ţara Sfântă, la mănăstirea Sf. Sava, la est de Betleem. La începutul secolului XIX, biblioteca mănăstirii conţinea nu mai puţin de o mie de manuscrise. Dar, din motive nu tocmai clare, palimpsestul lui Arhimede a fost dus iar înapoi la Constantinopol. Apoi, în 1840, celebrul specialist german în Biblie Constantin von Tischendorf (1815 – 1874),

descoperitorul unuia dintre primele manuscrise ale Bibliei, a vizitat biblioteca Metochion a Sfântului Mormânt din Constantinopol (filială a Patriarhatului Grec din Ierusalim) şi a văzut palimpsestul acolo. Tischendorf trebuie să fi găsit foarte bizar textul matematic de dedesubt, parţial vizibil, căci se pare că a smuls şi furat o pagină din manuscris. În 1879, acea pagină din moştenirea lui Tischendorf a fost vândută Bibliotecii Universităţii din Cambridge.

În 1899, specialistul grec A. Papadopoulos-Kerameus a catalogat toate manuscrisele adăpostite la Metochion, iar manuscrisul lui Arhimede apare pe lista sa ca Ms. 355. Papadopoulos-Kerameus a putut citi câteva rânduri din textul matematic şi, înţelegând poate importanţa sa, a reprodus acele rânduri în catalogul său. A fost un moment de cotitură în saga manuscrisului. Textul matematic din catalog a fost adus la cunoştinţa filologului danez Johan Ludvig Heiberg (1854 – 1928). Recunoscând că textul îi aparţine lui Arhimede.

Figura 12

Heiberg s-a dus la Istanbul în 1906, a examinat şi fotografiat palimpsestul, iar un an mai târziu şi-a anunţat

senzaţionala descoperire – două tratate nevăzute până atunci şi unul cunoscut doar din traducerea în latină, aparţinându-i lui Arhimede. Deşi Heiberg a putut citi şi, mai târziu, publica părţi din manuscrise în cartea sa despre lucrările lui Arhimede, au rămas goluri serioase. Din păcate, cândva după 1908, manuscrisul a dispărut de la Istanbul în împrejurări misterioase, pentru a reapărea în posesia unei familii pariziene, care pretindea că îl deţinea din anii ’20. Păstrat în condiţii neadecvate, palimpsestul se deteriorase ireversibil din cauza mucegaiului, iar trei pagini transcrise anterior de Heiberg dispăruseră complet. În plus, după 1929, cineva a pictat patru miniaturi în stil bizantin, acoperind patru pagini. În cele din urmă, familia franceză care deţinea manuscrisul l-a trimis spre licitaţie la Christie’s. Proprietatea asupra manuscrisului a fost disputată la tribunalul federal din New York în 1998. Patriarhia ortodoxă de la Ierusalim pretindea că manuscrisul fusese furat în anii ’20 dintr-una din mănăstirile sale, dar judecătorul a hotărât în favoarea casei Christie’s. Palimpsestul a fost ulterior supus licitaţiei de către Christie’s pe 29 octombrie 1998 şi a adus 2 milioane de dolari din partea unui cumpărător anonim. Proprietarul a depus manuscrisul lui Arhimede la Muzeul de Artă Walters din Baltimore, unde e încă supus unor intense lucrări de restaurare şi examinare amănunţită. Cercetătorii au astăzi la dispoziţie metode de investigaţie inexistente în trecut. Lumina ultravioletă, analiza multispectrală şi chiar razele X focalizate (la care a fost expus manuscrisul la Stanford) au contribuit deja la descifrarea unor părţi de manuscris necunoscute până atunci. În prezent, este în curs analiza atentă a manuscrisului lui Arhimede. Am avut norocul să întâlnesc echipa care studiază palimpsestul, iar figura 13 mă înfăţişează lângă dispozitivul experimental care iradiază cu lumină de diferite lungimi de undă o pagină a palimpsestului.

Toată vâlva care înconjoară palimpsestul este pe măsura unui document care ne face să întrevedem pentru

prima oară metoda marelui geometru.

Figura 13

Metoda

Când citim o carte despre geometria greacă ne impresionează concizia şi precizia cu care au fost formulate şi demonstrate acele teoreme cu mai bine de două milenii în urmă. Aceste cărţi nu oferă însă indicaţii privind felul în care au fost iniţial concepute teoremele. Excepţionalul document al lui Arhimede, *Metoda*, umple parţial acest gol – ne dezvăluie cum s-a convins Arhimede de adevărul anumitor teoreme înainte de a şti să le demonstreze. Iată o parte din cele scrise în introducere şi adresate matematicianului Eratostene din Cyrène (cca. 276 – 194 î.Hr.):

Îţi voi trimite demonstraţiile teoremelor în această carte. Pentru că, aşa cum am spus, ştiu că eşti stăruitor, bun dascăl de filosofie şi foarte interesat de cercetările matematice care ţi s-ar putea ivi în cale, m-am gândit că ar fi nimerit să scriu pentru dumneata, tot în cartea de faţă, o metodă specială care permite recunoaşterea anumitor probleme de matemati*că cu ajutorul mecanicii* [s. m.]. Sunt convins că aceasta e de asemenea folositoare la găsirea demonstraţiilor aceloraşi teoreme. Căci anumite lucruri

care mi-au devenit limpezi prin metoda mecanică au fost apoi demonstrate geometric, pentru că studiul lor prin numita metodă nu oferă o adevărată demonstraţie. Căci e mai uşor de dat demonstraţia după ce ai dobândit, cu ajutorul metodei, ceva cunoştinţe asupra problemei, decât atunci când trebuie s-o găseşti fără niciun fel de cunoştinţe prealabile.

Arhimede atinge aici unul dintre cele mai importante aspecte ale cercetării ştiinţifice şi matematice – este adesea mai greu să descoperi care sunt problemele sau teoremele importante decât să găseşti soluţii la probleme cunoscute sau demonstraţii pentru teoreme cunoscute. Aşadar, cum a descoperit Arhimede noi teoreme? Folosind cunoştinţele pe care le avea privind mecanica, echilibrul şi legile pârghiilor, a comparat în minte corpuri sau figuri ale căror volume sau arii voia să le găsească cu cele pe care le cunoştea deja. După ce determina astfel răspunsul pentru aria necunoscută sau volumul necunoscut, îi era mult mai uşor să demonstreze geometric corectitudinea răspunsului. Prin urmare, *Metoda* începe cu un număr de afirmaţii despre centrele de greutate şi continuă cu propoziţiile geometrice şi demonstraţiile acestora.

Metoda lui Arhimede este extraordinară din două motive. Întâi, pentru că introduce noţiunea de *experiment mintal* în cercetarea riguroasă. Hans Christian 0 ersted, fizician din secolul XIX, a numit acest instrument – un experiment imaginar care se substituie unuia real – *Gedankenexperiment* (în germană: „experiment care are loc în gând”). În fizică, unde acest concept a fost foarte rodnic, experimentele mintale sunt folosite fie pentru a ne face o idee înainte de realizarea efectivă a experimentului, fie în cazuri în care experimentele reale nu pot fi efectuate. În al doilea rând, şi mai important, Arhimede a eliberat matematica de lanţurile oarecum artificiale cu care o legaseră Euclid şi Platon. Pentru cei doi, nu exista decât un mod, şi unul singur, de a face matematică.

Trebuia început de la axiome şi continuat cu un şir inexorabil de paşi logici, folosind instrumente bine

determinate. Pe de altă parte, Arhimede, spirit liber, folosea pur şi simplu orice fel de muniţie care îi venea în minte pentru a formula noi probleme şi a le rezolva. Nu a ezitat să exploreze şi să exploateze legăturile dintre obiectele matematice abstracte (formele platoniciene) şi realitatea fizică (obiecte plate sau corpuri) pentru a face să progreseze matematica.

O ilustrare finală care întăreşte şi mai mult statutul de magician al lui Arhimede este faptul că a anticipat *calculul diferenţial şi integral* – ramură a matematicii creată de Newton (şi, independent, de matematicianul german Leibniz) abia la sfârşitul secolului XVII.

Ideea elementară de la baza procesului de *integrare* e foarte simplă (odată dezvăluită!). Să presupunem că trebuie să determinăm aria unui segment de elipsă. Putem împărţi aria în dreptunghiuri de lăţime egală şi aduna ariile acestor dreptunghiuri (figura 14). E limpede că, cu cât folosim mai multe dreptunghiuri, cu atât suma lor se va apropia mai mult de aria reală a segmentului. Cu alte cuvinte, aria segmentului este într-adevăr egală cu limita spre care tinde suma dreptunghiurilor atunci când numărul dreptunghiurilor tinde spre infinit. Găsirea acestei limite se numeşte *integrare.* Arhimede a folosit o variantă a acestei metode pentru a afla volumele şi ariile suprafeţelor sferei, conului, elipsoizilor şi paraboloizilor (corpuri care se obţin prin rotirea elipselor şi parabolelor în jurul propriilor axe).

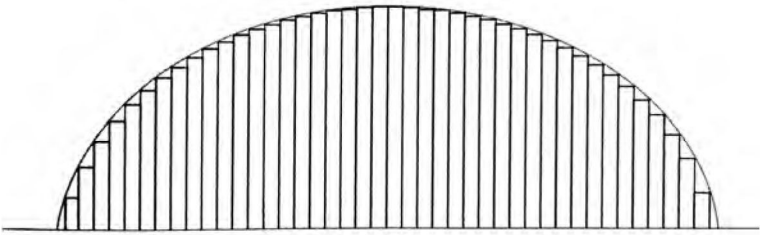


Figura 14

În *calculul diferenţial*, unul dintre scopurile principale este găsirea pantei unei drepte tangente la o

curbă într-un punct dat, adică dreapta care atinge curba doar în acel punct. Arhimede a rezolvat problema pentru cazul particular al spiralei, anticipând astfel cercetările viitoare ale lui Newton şi Leibniz. Astăzi, calculul diferenţial şi integral şi ramurile care derivă din ele formează baza pe care sunt construite majoritatea modelelor matematice din fizică, inginerie, economie sau dinamica populaţiilor.

Arhimede a schimbat profund lumea matematicii şi relaţia ei cu cosmosul. Etalând o uimitoare combinaţie de preocupări teoretice şi practice, el a oferit prima dovadă empirică, iar nu mitică, în sprijinul ideii că natura ascultă de un plan matematic. Ideea că matematica e limbajul universului, şi deci că Dumnezeu e matematician, a apărut în cercetările lui Arhimede. Există totuşi ceva ce Arhimede n-a făcut – nu a vorbit niciodată despre limitările modelelor matematice atunci când sunt aplicate la condiţii fizice reale. Discuţiile sale teoretice despre pârghii, de pildă, presupun că acestea sunt perfect rigide şi că barele nu au greutate. Prin urmare, a deschis oarecum calea interpretării modelelor matematice ca „salvare a aparenţelor” – ceea ce înseamnă că modelele matematice pot reprezenta doar ce observă oamenii şi nu pot descrie realitatea fizică adevărată, efectivă. Matematicianul grec Geminos (cca. 10 î.Hr. – 60 d.Hr.) a fost primul care a sesizat diferenţa între modelarea matematică şi explicaţiile fizice în legătură cu mişcarea corpurilor cereşti. El a făcut distincţia între astronomi (sau matematicieni), care, după părerea sa, nu trebuie decât să propună modele care să *reproducă* mişcările observate pe cer, şi fizicieni, care trebuie să găsească *explicaţii* pentru mişcările reale. Această distincţie avea să ajungă la un punct critic în vremea lui Galilei, despre care voi vorbi mai târziu în acest capitol.

Surprinzător poate, una dintre realizările pe care Arhimede însuşi le preţuia cel mai mult a fost descoperirea faptului că volumul unei sferei înscrise într-un cilindru (figura 15) este întotdeauna 2/3 din volumul cilindrului.

Acest rezultat l-a bucurat atât de mult, încât a cerut să-i fie cioplit pe piatra de mormânt. La 137

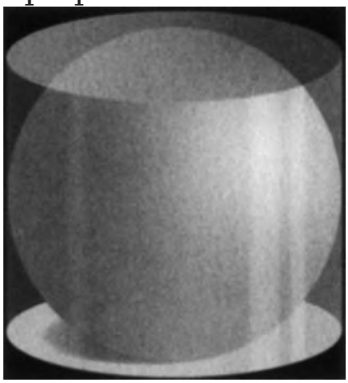


Figura 15

de ani de la moartea lui Arhimede, celebrul orator roman Marcus Tullius Cicero (cca. 106 – 43 î.Hr.) a descoperit mormântul marelui matematician. Iată tulburătoarea relatare a evenimentului, dată de Cicero:

Pe când mă aflam chestor în Sicilia, am reuşit să dau de urma mormântului său [al lui Arhimede]. Locuitorii Siracuzei nu ştiau nimic despre mormânt şi chiar negau că ar fi existat. Dar se afla acolo, complet înconjurat şi ascuns de tufişuri de muri şi mărăcini. Îmi aminteam că auzisem de câteva rânduri simple, în versuri, care ar fi fost înscrise pe mormântul său, despre o sferă şi un cilindru, cioplite în piatră deasupra mormântului. Aşa că m-am uitat atent la toate mormintele de lângă Poarta Agrigentină. În cele din urmă, am observat o micuţă coloană abia vizibilă deasupra tufărişului: purta deasupra o sferă şi un cilindru. Le-am spus imediat însoţitorilor mei din Siracuza, cetăţeni de vază ai oraşului, că bănuiam că acesta era tocmai lucrul pe care îl căutam. Oameni înarmaţi cu seceri au fost trimişi să cureţe locul, iar când cărarea spre monument a fost deschisă, ne-am îndreptat direct spre el. Versurile erau încă vizibile, deşi cam a doua jumătate a fiecărui rând se ştersese. Astfel, unul dintre cele mai faimoase oraşe din lumea greacă, iar în trecut de asemenea un mare centru al ştiinţei, n-ar fi ştiut nimic despre mormântul celui mai

strălucit cetăţean pe care l-a avut vreodată, dacă un bărbat din Arpinum n-ar fi venit să-l descopere!

Cicero n-a exagerat importanţa lui Arhimede. De fapt, am aşezat în mod deliberat atât de sus ştacheta titlului de „magician” pentru ca, pornind de la titanul Arhimede, să putem face un salt de optsprezece secole pentru a întâlni un bărbat de statură comparabilă. Spre deosebire de Arhimede, care spunea că ar putea urni Pământul din loc, acest magician a arătat că Pământul se mişca deja.

Cel mai bun discipol al lui Arhimede

Galileo Galilei (figura 16) se naşte la Pisa pe 15 februarie 1564. Tatăl său, Vincenzo, era muzician, iar mama, Giulia Ammanati, era o femeie plină de spirit, chiar dacă mai curând răutăcioasă, care nu suporta prostia. În 1581, Galileo urmează sfatul tatălui şi se înscrie la facultatea de arte a Universităţii din Pisa pentru a studia medicina. Interesul său pentru medicină păleşte în favoarea matematicii, de îndată ce intră la universitate. Prin urmare, în vacanţa de vară a lui 1583, îl roagă pe matematicianul Curţii toscane, Ostilio Ricci (1540 – 1603), să se întâlnească cu tatăl său pentru a-l convinge că Galileo era menit să devină matematician. Problema e într-adevăr tranşată curând după aceea, iar tânărul entuziast e fermecat de lucrările lui Arhimede: „Cei care-i citesc scrierile”, spune el, „îşi dau limpede seama cât de jos sunt toate celelalte minţi în comparaţie cu a lui Arhimede şi ce palidă e speranţa de a descoperi lucruri pe potriva celor descoperite de el”. La vremea aceea Galilei nu ştia că el însuşi avea una dintre puţinele minţi care nu erau mai prejos de cea a magistrului grec. Inspirat de legendara poveste a lui Arhimede şi a coroanei regelui, Galilei publică în

Figura 16

1586 o cărţulie intitulată *Mica balanţă,* despre o balanţă hidrostatică pe care o inventase. El vorbeşte mai târziu despre Arhimede într-o conferinţă literară ţinută la Academia din Florenţa, în care prezintă un subiect mai puţin obişnuit – amplasarea şi dimensiunile iadului în *Infernul* lui Dante.

În 1589, Galilei e numit la catedra de matematică a Universităţii din Pisa, în parte datorită călduroasei recomandări a lui Christophorus Clavius (1538 – 1612), reputat matematician şi astronom din Roma, pe care Galilei îl vizitase în 1587. Steaua tânărului matematician e în ascensiune. Galilei îşi petrece următorii trei ani expunând primele sale concluzii privind teoria mişcării. Aceste scrieri, evident stimulate de opera lui Arhimede, conţin un amestec fascinant de idei interesante şi afirmaţii false. De pildă, alături de înţelegerea, pentru prima dată, a faptului că se pot testa teoriile căderii corpurilor folosind un plan înclinat pentru a încetini mişcarea, Galilei afirmă în mod greşit că, atunci când corpurile sunt lăsate să cadă din turnuri, „lemnul se mişcă mai repede decât plumbul la începutul deplasării sale”. Înclinaţiile şi concluziile generale ale lui Galilei din această perioadă a vieţii sale au fost răstălmăcite de primul său biograf, Vincenzio Viviani

(1622 – 1703). Viviani a creat imaginea populară a unui experimentator meticulos care a dobândit o perspectivă nouă şi pătrunzătoare din observarea amănunţită a fenomenelor naturii. De fapt, până în 1592, când se mută la Padova, orientarea şi metodologia lui Galilei erau în primul rând matematice. Se baza mai mult pe experimente mintale şi pe reprezentarea lumii după modelul lui Arhimede, prin figuri geometrice care ascultă de legi matematice. Cea mai mare nemulţumire faţă de Aristotel se lega pe atunci de faptul că acesta „era ignorant nu numai în ce priveşte descoperirile profunde şi subtile din geometrie, dar şi în privinţa celor mai elementare principii ale ştiinţei". Galilei credea şi că Aristotel se baza prea mult pe experienţele senzoriale, „căci ele oferă, la prima vedere, o oarece aparenţă de adevăr". Galilei propune în schimb „folosirea mereu a raţionamentului în locul exemplelor (din moment ce noi căutăm cauzele efectelor, iar acestea nu sunt dezvăluite de experienţă.)".

Tatăl lui Galilei moare în 1591, şi astfel Galilei, care acum trebuie să-şi întreţină familia, acceptă un post la Padova, unde primeşte un salariu de trei ori mai mare. Următorii optsprezece ani se dovedesc a fi cei mai fericiţi din viaţa lui Galilei. La Padova începe şi relaţia sa de lungă durată cu Marina Gamba, cu care nu s-a căsătorit niciodată, dar care i-a dăruit trei copii – Virginia, Livia şi Vincenzio.

Pe 4 august 1597, Galilei îi scrie o scrisoare personală marelui astronom german Johannes Kepler, în care recunoaşte că era copernican „de multă vreme", adăugând că găsise în modelul heliocentric copernican o cale de a explica unele evenimente naturale ce nu puteau fi explicate de doctrina geocentrică. Deplângea faptul că totuşi Copernic „părea să fie ridiculizat şi hulit". Această scrisoare marchează lărgirea prăpastiei dintre Galilei şi cosmologia aristotelică. Cosmologia modernă începea să capete formă.

Vestitorul stelar

În seara de 9 octombrie 1604, astronomii din Verona,

Roma şi Padova au fost surprinşi să descopere o nouă stea care a devenit rapid mai strălucitoare decât toate stelele de pe cer. Meteorologul Jan Brunowski, funcţionar imperial la Praga, a văzut-o şi el pe 10 octombrie şi, cuprins de o mare agitaţie, l-a informat imediat pe Kepler. Norii l-au împiedicat pe Kepler să observe steaua până pe 17 octombrie, dar apoi şi-a înregistrat observaţiile timp de aproape un an, publicând în cele din urmă o carte despre „noua stea" în 1606. Ştim astăzi că spectacolul ceresc din 1604 nu a marcat naşterea unei noi stele, ci moartea prin explozie a uneia bătrâne. Acest eveniment, numit acum *supernova lui Kepler,* a provocat o senzaţie stranie la Padova. Galilei a reuşit să vadă noua stea cu ochii săi la sfârşitul lui octombrie 1604, iar în lunile decembrie şi ianuarie a ţinut trei conferinţe publice pe această temă, în faţa unui public larg. Apelând la ştiinţă, iar nu la superstiţii, Galilei a arătat că absenţa oricărei deplasări aparente (*paralaxă)* a poziţiei noii stele (faţă de fondul stelelor fixe) demonstra că noua stea trebuia localizată dincolo de regiunea lunară. Importanţa acestei observaţii a fost imensă. În lumea aristotelică, toate schimbările din cer se limitau la această zonă până la Lună, iar sfera mult mai îndepărtată a stelelor fixe se presupunea că e sacră şi imună la schimbări.

Distrugerea sferei imuabile începuse deja în 1572, când astronomul danez Tycho Brahe (1546 – 1601) observase o altă explozie stelară cunoscută acum ca *supernova lui Tycho.* Evenimentul din 1604 a mai bătut un cui în sicriul cosmologiei lui Aristotel. Dar adevărata breşă în înţelegerea cosmosului nu s-a produs nici pe tărâmul speculaţiei teoretice, nici pe cel al observaţiilor cu ochiul liber. Ea a fost rezultatul unui experiment simplu cu lentile de sticlă convexe (bombate spre exterior) şi concave (curbate spre interior) – două dintre acestea, ţinute la vreo 33 cm una de alta, fac ca obiectele depărtate să pară brusc mai apropiate. Prin 1608, astfel de lentile începuseră să apară peste tot în Europa, iar un fabricant de ochelari olandez şi doi flamanzi depuseseră chiar cereri pentru a le

breveta. Zvonuri în legătură cu miraculosul instrument ajung la urechile teologului veneţian Paolo Sarpi, care îl informează pe Galilei în mai 1609. Nerăbdător să confirme informaţia, Sarpi îi scrie unui prieten din Paris, Jacques Badovere, pentru a afla dacă zvonurile erau întemeiate. Potrivit propriei sale mărturisiri, Galilei „a fost cuprins de dorinţă faţă de frumosul obiect". Avea să prezinte mai târziu aceste evenimente în cartea sa *Vestitorul stelar,* apărută în martie 1610:

Acum vreo zece luni, mi-a ajuns la urechi vestea că un anume Fleming a construit o lunetă cu ajutorul căreia diverse obiecte, deşi foarte depărtate de ochiul observatorului, erau văzute clar ca şi cum ar fi fost în apropiere. Au fost relatate mai multe experienţe ale acestui remarcabil efect, cărora unii oameni le dau crezare, în vreme ce alţii le neagă. Câteva zile mai târziu, vestea mi-a fost confirmată într-o scrisoare din partea unui nobil francez din Paris, Jacques Badovere, ceea ce m-a convins să mă dedic cu trup şi suflet cercetării mijloacelor prin care aş putea ajunge la inventarea unui instrument asemănător. Ceea ce am făcut curând după aceea, bazându-mă pe legea refracţiei.

Galilei dovedeşte aici acelaşi tip de gândire practică creatoare ca Arhimede – odată ce a aflat că telescopul putea fi construit, nu i-a luat mult până să construiască el însuşi unul. Mai mult, între august 1609 şi martie 1610, Galilei şi-a folosit inventivitatea pentru a îmbunătăţi puterea de mărire a telescopului său de la opt la douăzeci de ori. Această realizare constituia în sine o performanţă tehnică, dar geniul lui Galilei se va dezvălui nu prin îndemânarea sa practică, ci prin întrebuinţarea dată tubului de mărire a imaginii (pe care l-a numi*pterspicillium).* În loc de a privi corăbii din largul coastelor Veneţiei sau de a examina acoperişurile din Padova, Galilei şi-a îndreptat telescopul spre cer. A urmat un lucru fără precedent în istoria ştiinţei. După cum spunea istoricul ştiinţei Noel Swerdlow, „În vreo două luni, decembrie şi ianuarie [1609 şi, respectiv, 1610], a făcut

mai multe descoperiri care au schimbat lumea decât făcuse vreodată cineva până la el”. De fapt, anul 2009 a fost numit Anul Internaţional al Astronomiei pentru a marca cea de-a patru suta aniversare a primelor observaţii ale lui Galilei. Ce a făcut de fapt Galilei pentru a deveni un erou al ştiinţei? Iată câteva dintre surprinzătoarele sale descoperiri folosind telescopul.

Îndreptându-şi telescopul spre Lună şi studiind linia care separă partea luminată de Soare de cea întunecată de pe discul Lunii, Galilei a descoperit că acest corp ceresc avea o suprafaţă neregulată, cu munţi, cratere şi câmpii întinse. A urmărit cum apăreau punctele strălucitoare pe partea acoperită de întuneric şi cum aceste gămălii luminoase se lărgeau şi se răspândeau întocmai ca lumina Soarelui care răsare şi atinge vârfurile munţilor. A folosit până şi geometria razelor de lumină pentru a determina înălţimea unuia dintre munţi, care s-a dovedit a fi de peste 6 km. Dar asta nu a fost tot. Galilei a observat că faţa întunecată a Lunii (în faza crescătoare) este şi ea slab luminată, şi a tras concluzia că acest fapt se datora luminii Soarelui reflectate de Pământ. Galilei afirmă că, la fel cum Pământul e luminat de Luna plină, suprafaţa lunară se scaldă în lumina reflectată de Pământ.

Dacă unele dintre aceste descoperiri nu erau cu totul noi, tăria dovezilor aduse de Galilei ridică discuţia la un alt nivel. Până în epoca lui Galilei, exista o distincţie clară între terestru şi ceresc, pământean şi divin. Diferenţa nu era doar ştiinţifică sau filosofică. Mitologia, religia, poezia romantică şi sensibilitatea estetică ţesuseră o bogată tapiserie în jurul văditei deosebiri dintre cer şi pământ. Acum Galilei spunea ceva de neconceput. Contrar doctrinei aristotelice, Galilei pune practic pe acelaşi plan Pământul şi un corp divin (Luna) – ambele au suprafeţe solide, neregulate şi reflectă lumina Soarelui.

Trecând dincolo de Lună, Galilei începe să observe planetele – numele inventat de greci pentru aceşti „rătăcitori” pe cerul nopţii. Îndreptându-şi telescopul spre Jupiter pe 7 ianuarie 1610, este uimit să descopere trei noi

stele aliniate pe o linie care traversa planeta, două la est şi una la vest. Noile stele păreau să-şi fi schimbat poziţia faţă de Jupiter în nopţile următoare. Pe 13 ianuarie, observă o a patra asemenea stea. După o săptămână de la descoperirea iniţială, Galilei ajunge la o concluzie surprinzătoare – noile stele erau de fapt sateliţi care se învârteau în jurul lui Jupiter, la fel cum Luna se învârtea în jurul Pământului.

Una dintre trăsăturile distinctive ale celor care au marcat istoriei ştiinţei este capacitatea lor de a pricepe imediat care descoperiri sunt cu adevărat ieşite din comun. Altă trăsătură a multor savanţi de forţă este talentul de a-i face pe ceilalţi să înţeleagă descoperirile lor. Galilei era un maestru în ambele privinţe. Îngrijorat de faptul că şi altcineva ar putea descoperi sateliţii lui Jupiter, Galilei s-a grăbit să-şi publice rezultatele, iar în primăvara lui 1610 îi apărea la Veneţia tratatul *Sidereus nuncius (Vestitorul stelar).* Încă abil din punct de vedere politic în acel moment al vieţii sale, Galilei îi dedică tratatul marelui duce al Toscanei, Cosimo al II-lea de Medici, şi numeşte sateliţii „Stelele medicee”. Doi ani mai târziu, în urma unei munci pe care a numit-o „de proporţii atlantice”, Galilei a putut determina perioadele de rotaţie – timpul în care fiecare satelit se învârtea în jurul lui Jupiter – cu o precizie de câteva minute. *Vestitorul stelar* a devenit într-o clipă un bestseller – cele cinci sute de exemplare iniţiale s-au epuizat rapid –, făcându-l pe Galilei celebru pe întregul continent.

Importanţa descoperirii sateliţilor lui Jupiter e colosală. Nu numai că erau primele corpuri adăugate sistemului solar de la observaţiile grecilor încoace, dar simpla existenţă a acestor sateliţi a suprimat dintr-o singură lovitură una dintre cele mai serioase obiecţii aduse teoriei lui Copernic. Aristotelicienii susţinuseră că era imposibil ca Pământul să se rotească în jurul Soarelui, pentru că Luna se învârtea în jurul Pământului. Cum putea avea universul două centre de rotaţie, Soarele şi Pământul? Descoperirea lui Galilei arăta fără putinţă de

tăgadă că o planetă putea avea sateliţi învârtindu-se în jurul ei, în timp ce planeta însăşi îşi urma propriul drum în jurul Soarelui.

Altă descoperire importantă făcută de Galilei în 1610 este cea a fazelor planetei Venus. În doctrina geocentrică, se presupunea că Venus se mişca pe un cerc mic (un *epiciclu)* suprapus peste orbita sa în jurul Pământului, iar centrul epiciclului se afla întotdeauna pe linia care uneşte Pământul şi Soarele (ca în figura 17 a; desenul nu este la scară). În acest caz, atunci când observaţia e efectuată de pe Pământ, ne-am aştepta ca Venus să apară mereu ca o semilună de lăţime variabilă. Pe de altă parte, în sistemul lui Copernic, imaginea lui Venus trebuie să se transforme de la un mic disc strălucitor, atunci când planeta se află de cealaltă parte a Soarelui (văzut de pe Pământ), la un disc mare şi aproape întunecat, atunci când Venus e de aceeaşi parte cu Pământul (figura 17 b). Între aceste două poziţii, Venus trebuie să treacă printr-o serie de faze similare cu cele ale Lunii. Galilei a purtat o corespondenţă legată de această diferenţă importantă între previziunile celor două doctrine cu fostul său elev Benedetto Castelli (15781643) şi a efectuat observaţii cruciale între octombrie şi decembrie 1610. Verdictul era clar. Observaţiile au confirmat previziunile lui Copernic, dovedind că Venus se rotea într-adevăr în jurul Soarelui. Pe 11 decembrie, aflat în dispoziţie ludică, Galilei îi trimite lui Kepler o anagramă obscură *„Haec immatura a mei am frustra leguntur oy”* („Acest lucru a fost încercat de mine în van prea devreme”). Kepler a încercat fără succes să descifreze mesajul ascuns şi, în cele din urmă, a renunţat. În următoarea sa scrisoare, pe 1 ianuarie 1611, Galilei permută în sfârşit literele anagramei: *„Cynthiae figuras aemulatur mater amorum”* („Mama iubirii [Venus] imită figurile Cynthiei [Luna]”).

Toate descoperirile prezentate până aici privesc fie planete ale sistemului solar – corpuri cereşti care se rotesc în jurul Soarelui şi îi reflectă lumina –, fie sateliţi rotindu-se în jurul acestor planete. Galilei a făcut şi descoperiri

importante legate de stele – corpuri cereşti care emană propria lor lumină, cum e Soarele. Întâi, face observaţii asupra Soarelui însuşi. În viziunea aristotelică se presupunea că Soarele simboliza desăvârşirea şi imuabilul nepământean. Închipuiţi-vă şocul provocat de descoperirea că suprafaţa Soarelui era departe de a fi perfectă. Ea conţine pete şi puncte întunecate care apar şi dispar pe măsură ce Soarele se roteşte în jurul propriei axe. Figura 18 înfăţişează petele Soarelui desenate de mâna lui

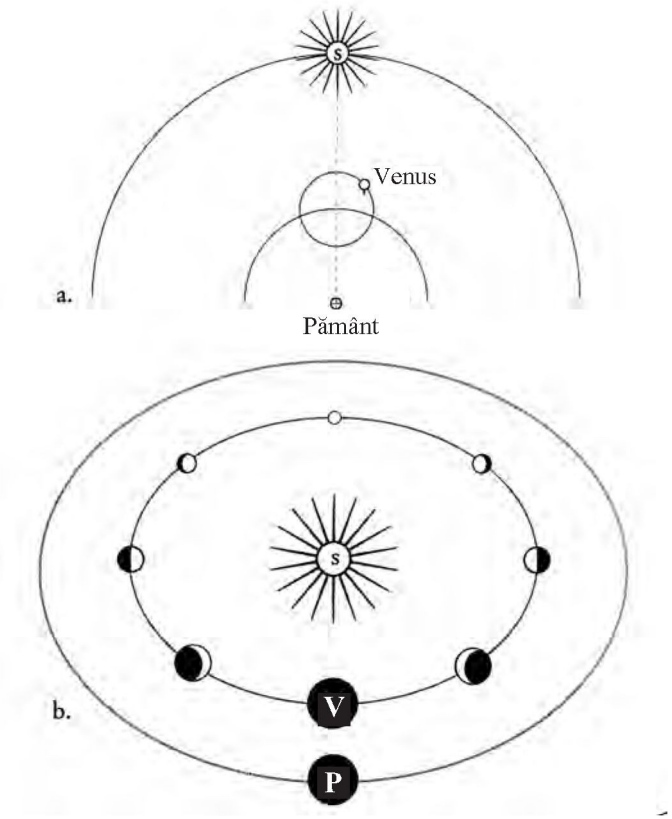


Figura 17

Galilei, despre care colegul acestuia, Federico Cesi (1585 – 1630), scria că „încântă deopotrivă prin minunăţia priveliştii şi prin precizia expresiei”. De fapt, Galilei nu era primul care să fi văzut petele din Soare, nici primul care să fi scris despre ele. Broşura *Trei scrisori despre petele*

solare, scrisă de preotul şi savantul iezuit Christopher Scheiner (1573 – 1650) l-a deranjat atât de tare pe Galilei, încât s-a simţit obligat să publice o ripostă bine articulată. Scheiner susţinea că era imposibil ca petele să se afle chiar pe suprafaţa Soarelui. Afirmaţia sa se baza parţial pe faptul că petele erau, după părerea sa, prea întunecate (credea că sunt mai întunecate decât părţile întunecate ale Lunii), şi parţial pe faptul că nu păreau să revină în aceleaşi poziţii. În consecinţă, Scheiner credea că acestea erau mici planete care se învârteau în jurul Soarelui. În *Relatare şi demonstraţii cu privire la petele solare şi la schimbările lor,* Galilei distruge sistematic argumentele lui Scheiner, unul câte unul. Cu o meticulozitate, un spirit şi un sarcasm care l-ar fi entuziasmat pe Oscar Wilde, Galilei arată că petele nu erau de fapt deloc întunecate, ci apăreau aşa doar în raport cu suprafaţa strălucitoare a Soarelui. În plus, lucrarea lui Galilei nu lăsa loc de îndoială că petele se aflau chiar pe suprafaţa Soarelui (mă voi întoarce la demonstraţia lui Galilei mai târziu în acest capitol).

Observaţiile lui Galilei asupra celorlalte stele au fost cu adevărat primele aventuri umane în partea de cosmos ce se întinde dincolo de sistemul solar. Spre deosebire de ce se întâmpla în cazul Lunii

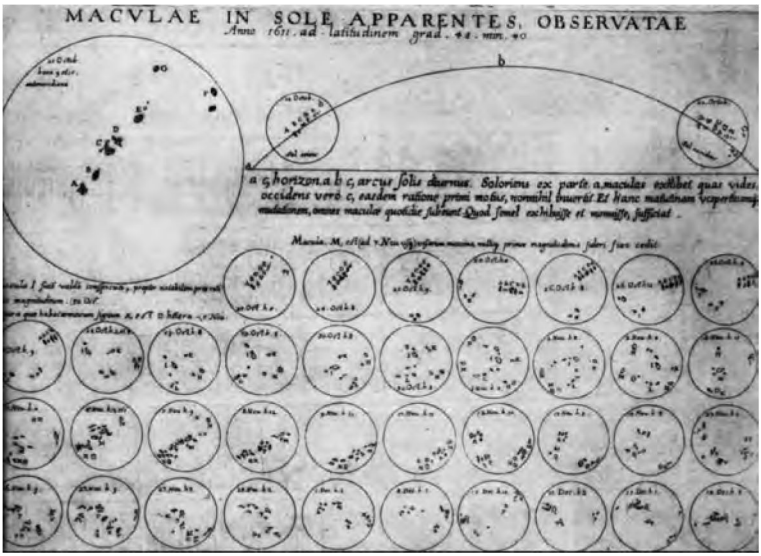

MACVLAE IN SOLE APPARENTES, OBSERVATAE
Anno 1611. ad latitudinem grad. 44. min. 40.
b
a c horizon. a b c, arcus solis diurnus. Solarium ex parte a maculas exhibet quas vides,
occidens verò c, eadem ratione primo mane, nondum apparuit. Et hanc mutationem
undationem, omnes macular quotidie subeunt. Quod simul exhibuisse et nunquam, sufficiat.

Figura 18

şi al planetelor, Galilei a descoperit că telescopul său nu mărea aproape deloc imaginile stelelor. Concluzia era clară – stelele se aflau mult mai departe decât planetele. Acest fapt constituia o surpriză în sine, dar ceea ce sărea cu adevărat în ochi era *numărul* de noi stele pe care le dezvăluia telescopul. Numai într-o mică regiune din jurul constelaţiei Orion, Galilei a descoperit nu mai puţin de cinci sute de noi stele. Când şi-a îndreptat telescopul spre Calea Lactee – fâşia nebuloasă care traversează cerul nopţii –, Galilei a fost şi mai surprins. Chiar şi acea pată luminoasă cu aspect neted s-a prefăcut într-o puzderie de stele pe care niciun om nu le văzuse înainte. Universul a devenit deodată mult mai mare. În limbajul oarecum arid al omului de ştiinţă, Galilei spune:

Ceea ce am observat în al treilea rând este natura materiei Căii Lactee, care, cu ajutorul lunetei, poate fi observată atât de bine, încât toate disputele care i-au frământat pe filosofi timp de multe generaţii sunt dizolvate de o certitudine vizibilă, şi nu mai avem nevoie de argumente terestre. Căci Galaxia nu e decât un amestec de nenumărate stele dispuse în grupuri. În orice direcţie ai

orienta luneta, un număr imens de stele se înfăţişează imediat privirii. Dintre care multe apar destul de mari şi foarte vizibile, dar mulţimea celor mici este cu adevărat de necuprins.

Unii dintre contemporanii lui Galilei au reacţionat cu entuziasm. Descoperirile lui Galilei au aprins deopotrivă imaginaţia savanţilor şi a oamenilor de rând, pretutindeni în Europa. Poetul scoţian Thomas Seggett scria dus de val:

Columb le-a dat oamenilor pământuri de cucerit prin vărsare de sânge.

Galilei noi lumi ce nu fac rău nimănui.

Ce-i mai bine?

Sir Henry Wotton, diplomat englez la Veneţia, reuşeşte să pună mâna pe un exemplar din *Sidereus nuncius* în ziua în care apare cartea. O trimite imediat regelui Iacob I al Angliei, însoţită de o scrisoare care spune:

Trimit Majestăţii Voastre cea mai stranie noutate (după cum aş putea, pe drept cuvânt, s-o numesc) pe care aţi primit-o vreodată din partea de lume în care mă aflu: cartea alăturată (difuzată chiar azi) a profesorului de matematică din Padova care, cu ajutorul unui instrument optic [...] a descoperit patru noi planete ce se rotesc în jurul sferei lui Jupiter, împreună cu multe alte stele fixe necunoscute.

Volume întregi se pot scrie (şi au fost într-adevăr scrise) despre toate realizările lui Galilei, dar ele nu fac obiectul acestei cărţi. Aici vreau doar să examinez efectul unora dintre aceste uimitoare descoperiri asupra felului în care Galilei privea universul. În particular, ce relaţie găsea el între matematică şi vasta desfăşurare a cosmosului?

Marea carte a naturii

Filosoful ştiinţei Alexandre Koyre (1892 – 1964) a remarcat odată că revoluţia produsă de Galilei în gândirea ştiinţifică poate fi redusă la un element esenţial: descoperirea că matematica este gramatica ştiinţei. În timp ce aristotelicienii se mulţumeau cu o descriere calitativă a naturii, şi chiar şi pentru aceea apelau la

autoritatea lui Aristotel, Galilei credea că savanţii trebuie să asculte natura însăşi, iar relaţiile matematice şi modelele geometrice erau cheile pentru descifrarea limbajului universului. Diferenţele nete dintre cele două abordări sunt exemplificate de scrierile unor membri proeminenţi ai celor două tabere. Aristotelicianul Giorgio Coresio spunea: „Prin urmare, acela care nu vrea să lucreze în întuneric trebuie să apeleze la Aristotel, desăvârşitul interpret al naturii”. La care alt aristotelician, filosoful Vincenzo di Grazia din Pisa, adăuga:

Înainte de a lua în considerare demonstraţiile lui Galilei, pare necesar să arătăm cât de departe de adevăr sunt cei care doresc să demonstreze fapte naturale cu ajutorul raţionamentului matematic, printre care, dacă nu greşesc, se numără Galilei. Toate ştiinţele şi toate artele au propriile lor principii şi cauze, cu ajutorul cărora demonstrează proprietăţile particulare ale obiectelor lor. *Rezultă de aici că nu avem voie să folosim principiile unei ştiinţe pentru a demonstra proprietăţile alteia* [s. m.]. Prin urmare, oricine crede că poate demonstra proprietăţi ale naturii cu argumente matematice şi-a pierdut pur şi simplu minţile, pentru că cele două ştiinţe sunt foarte diferite. Savantul care se ocupă de natură studiază corpuri ale naturii a căror stare firească şi proprie este cea de mişcare, pe când matematicianul se sustrage oricărei mişcări.

Această idee a unei compartimentări ermetice a ramurilor ştiinţei era tocmai genul de idee care-l înfuria pe Galilei. În introducerea la tratatul său de hidrostatică *Discurs despre lucrurile care plutesc sau se mişcă pe apă,* Galilei arată că matematica e un instrument puternic ce le permite oamenilor să dezvăluie secretele naturii:

Mă aştept la o teribilă mustrare din partea unuia dintre adversarii mei, şi aproape că-l pot auzi urlându-mi în urechi că una e să te ocupi de lucruri în chip fizic, şi alta în chip matematic, şi că geometrii ar trebui să rămână la fanteziile lor şi să nu se amestece în probleme filosofice în care concluziile diferă de cele din matematică. De parcă

adevărul n-ar fi unul singur; de parcă geometria ar fi, în zilele noastre, un obstacol în dobândirea adevăratei filosofii; de parcă ar fi imposibil să fii geometru şi în acelaşi timp filosof, aşa încât să trebuiască să deducem cu necesitate că cine se pricepe la geometrie nu se poate pricepe la fizică, nu poate emite judecăţi despre ea şi nu poate trata problemele fizicii în mod fizic! Concluzie nu mai puţin prostească decât cea a unui anume doctor care, orbit de ură, a spus că marele doctor Acquapendente [anatomistul italian Hieronymus Fabricius (1537 – 1619)], fiind un celebru anatomist şi chirurg, ar trebui să se mulţumească să rămână printre scalpele şi alifii, fără a încerca să lecuiască prin medicină, ca şi cum priceperea în chirurgie s-ar opune medicinei şi ar distruge-o.

Descoperirea petelor solare oferă un exemplu privind felul în care aceste atitudini diferite faţă de descoperirile prin observaţie pot altera complet interpretarea fenomenelor naturale. După cum am remarcat mai sus, astronomul iezuit Christopher Scheiner a observat petele cu competenţă şi atenţie. A făcut însă greşeala de a lăsa prejudecata aristotelică despre perfecţiunea cerului să-i întunece judecata. Prin urmare, atunci când a descoperit că petele nu se întorceau în aceeaşi poziţie şi ordine, s-a grăbit să anunţe că putea „elibera Soarele de ofensa petelor”. Premisa caracterului imuabil al cerului, de la care pornise, i-a frânat imaginaţia şi l-a împiedicat să ia în considerare posibilitatea ca petele să se schimbe, devenind chiar de nerecunoscut. A tras deci concluzia că petele *trebuiau* să fie stele care se învârteau în jurul Soarelui. Perspectiva lui Galilei în problema distanţei dintre pete şi suprafaţa Soarelui era complet diferită. El identificase trei observaţii care se cereau explicate: întâi, petele păreau mai subţiri când se aflau aproape de marginea discului solar decât atunci când se aflau aproape de centrul discului. În al doilea rând, distanţele dintre pete păreau să crească pe măsură ce petele se apropiau de centrul discului. În fine, petele păreau să se deplaseze mai repede în apropierea centrului decât în apropierea marginii. Cu o

singură construcţie geometrică, Galilei a putut demonstra că ipoteza – petele se aflau în contact cu suprafaţa Soarelui şi se deplasau odată cu ea – era în concordanţă cu toate observaţiile. Explicaţia sa se baza pe efectul perspectivei pe o sferă – formele apar mai subţiri şi mai apropiate între ele către margine (figura 19 înfăţişează acest efect pentru cercuri desenate pe o suprafaţă sferică).

Importanţa demonstraţiei lui Galilei pentru fundamentarea procesului ştiinţific a fost uriaşă. El a arătat că datele de observaţie căpătau sens ca descrieri ale realităţii numai atunci când erau încorporate într-o teorie matematică adecvată. Aceleaşi observaţii

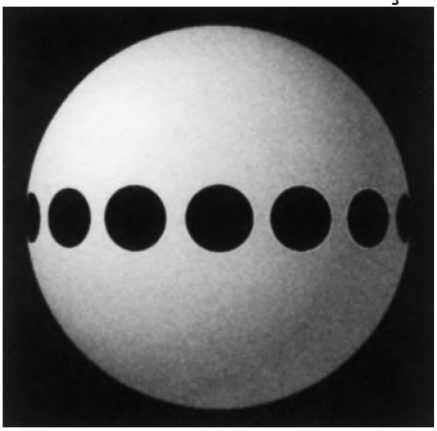


Figura 19

puteau conduce la interpretări ambigue, dacă nu erau înţelese într-un context teoretic mai larg.

Galilei n-a ezitat niciodată să intre în dispută. Cele mai clare expuneri ale ideilor sale privind natura matematicii şi rolul acesteia în ştiinţă apar într-un alt text polemic – *Il Saggiatoare (Balanţa de maximă precizie).* Acest tratat strălucit cunoaşte un asemenea succes încât i se citesc pagini din el Papei Urban al VIII-lea în timpul meselor. Ciudat lucru însă: teza centrală a lui Galilei din *Il Saggiatoare* era complet greşită. El a încercat să arate că în realitate cometele sunt fenomene provocate de unele capricii ale refracţiei optice din regiunea sublunară.

Întreaga poveste a lui *Il Saggiatoare* pare extrasă din

libretul unei opere italiene. În toamna lui 1618, trei comete apar una după alta. Cea de-a treia rămâne vizibilă timp de aproape trei luni. În 1619, Horatio Grassi, matematician al instituţiei iezuite Collegio Romano, publică anonim o broşură cu observaţiile sale asupra acestor comete. Pe urmele marelui astronom danez Tycho Brahe, Grassi plasează cometele undeva între Lună şi Soare. Broşura ar fi putut trece neobservată, dar Galilei se hotărăşte să riposteze, pentru că i se spusese că unii iezuiţi priveau cartea lui Grassi ca pe o lovitură dată teoriei copernicane. Răspunsul său a luat forma unor conferinţe (scrise în mare parte de Galilei însuşi) ţinute de Mario Guiducci, discipol al lui Galilei. În versiunea publicată a acestor conferinţe, *Discurs despre comete*, Galilei îi atacă direct pe Grassi şi Tycho Brahe. De data asta era rândul lui Grassi să se simtă jignit. Sub pseudonimul Lothario Sarsi, şi dându-se drept unul dintre propriii săi studenţi, Grassi a publicat un răspuns caustic, criticându-l pe Galilei în termeni duri (răspunsul era intitulat *Balanţa astronomică şi filosofică cu care sunt cântărite părerile lui Galileo Galilei despre comete, precum şi cele prezentate la Academia din Florenţa de Mario Guiducci).* Apărându-se că a aplicat metoda lui Tycho Brahe de determinare a distanţelor, Grassi (exprimându-se ca şi cum ar fi fost propriul său student) spune:

Să acceptăm că maestrul meu l-a urmat pe Tycho. E asta o crimă? Pe cine altcineva ar fi trebuit să urmeze? Pe Ptolemeu [creatorul sistemului geocentric]? Adepţii lui îşi văd beregata ameninţată de sabia lui Marte. Pe Copernic? Dar cine este cu adevărat credincios îi va goni pe toţi din preajma lui, va dispreţui şi va respinge ipoteza sa de curând condamnată. Prin urmare, Tycho rămâne singurul pe care îl putem accepta drept călăuză pe cărările necunoscute ale stelelor.

Acest text arată că matematicienii iezuiţii se aflau pe muchie de cuţit la începutul secolului XVII. Pe de-o parte, critica lui Grassi la adresa lui Galilei era perfect întemeiată

şi foarte pătrunzătoare. Pe de altă parte, fiind obligat să respingă teoria lui Copernic, Grassi îşi autoimpune o cămaşă de forţă care îi alterează judecata.

Prietenii lui Galilei sunt atât de îngrijoraţi că atacul lui Grassi avea să submineze autoritatea lui Galilei, încât îl somează pe maestru să răspundă. Astfel s-a ajuns la publicarea lui *Il Saggiatoare* în 1623 (titlul complet spunea că în acel document „sunt cântărite cu o balanţă fină şi precisă cele cuprinse în *Balanţa astronomică şi filosofică* de Lotahario Sarsi Sigensano”).

După cum am remarcat înainte, *Il Saggiatoare* conţine afirmaţia cea mai clară şi mai tranşantă a lui Galilei privind matematica şi cosmosul. Iată remarcabilul text:

Cred că Sarsi este ferm convins că în filosofie e esenţial să te sprijini pe părerea vreunui autor celebru, ca şi cum atunci când minţile noastre nu sunt legate de gândirea altcuiva ele sunt osândite să rămână seci şi sterile. Poate îşi închipuie că filosofia este o carte de literatură născocită de vreun om, ca *Iliada* sau *Orlando furioso* [poem epic din secolul XVI, scris de Ludovico Ariosto] – cărţi în care cel mai puţin important lucru este dacă ceea ce stă scris în ele e adevărat. Domnule Sarsi, nu aşa stau lucrurile. *Filosofia e scrisă în marea carte pe care o aveţi mereu în faţa ochilor (vreau să spun universul), dar pe care n-o putem înţelege dacă nu învăţăm întâi limba şi nu descifrăm caracterele în care e scrisă. Ea este scrisă în limba matematicii, iar caracterele sunt triunghiurile, cercurile şi alte figuri geometrice, fără de care este omeneşte imposibil să înţelegem un singur cuvânt din ea, şi fără de care rătăcim zadarnic într-un labirint întunecat.* [s. m.]

Uimitor, nu-i aşa? Cu secole înainte de a se pune întrebarea de ce este matematica atât de eficientă în explicarea naturii, Galilei credea că deţine deja răspunsul! Pentru el, matematica era pur şi simplu limba universului. Pentru a înţelege universul, susţinea el, trebuie să-i cunoaştem limba. Dumnezeu este într-adevăr

matematician.

Întregul spectru al ideilor din scrierile lui Galilei compune un tablou şi mai amănunţit al felului în care vedea el matematica. Întâi, trebuie să înţelegem că pentru Galilei matematica însemna în fond geometrie. A fost rareori interesat să măsoare valori în numere absolute. A descris fenomenele mai ales prin raporturi între cantităţi şi în termeni relativi. În această privinţă, Galilei era iarăşi un veritabil discipol al lui Arhimede – a folosit din plin principiul pârghiei şi metoda geometriei comparate. O a doua idee interesantă, revelată în special de ultima sa carte, este distincţia pe care

Galilei o face între rolul geometriei şi cel al logicii. Această carte, *Discursuri şi demonstraţii matematice cu referire la două noi ştiinţe*, e scrisă sub forma unor discuţii însufleţite între trei interlocutori, Salviati, Sagredo şi Simplicio, ale căror roluri sunt bine definite. Salviati este purtătorul de cuvânt al lui Galilei. Sagredi, aristocratul iubitor de filosofie, este un om care s-a dabarasat deja de iluziile judecăţii comune aristotelice şi poate fi deci convins de forţa noii ştiinţe matematice. Simplicio, care în operele precedente ale lui Galilei era vrăjit de autoritatea aristotelică, apare aici ca un elev cu mintea deschisă. În cea de-a doua zi a dezbaterii, Sagredo poartă un dialog interesant cu Simplicio:

Sagredo: Ce-am putea spune, Simplicio? Nu trebuie oare să recunoaştem că puterea geometriei este dintre toate instrumentele cel mai nimerit pentru a ascuţi mintea şi a o pregăti să judece desăvârşit şi să facă speculaţii? N-a avut oare Platon motive întemeiate să vrea ca elevii săi să studieze înainte de toate matematica?

Simplicio pare să fie de acord şi aduce în discuţie comparaţia cu logica:

Simplicio: Încep într-adevăr să înţeleg că, deşi logica e un minunat instrument de îndrumare a judecăţii, nu se compară cu ascuţimea geometriei în trezirea minţii către descoperire.

Sagredo adânceşte apoi această distincţie:

Sagredo: Mi se pare că logica ne învaţă cum să aflăm dacă raţionamentul şi demonstraţiile deja descoperite sunt concludente sau nu, dar nu cred că ne învaţă cum să găsim raţionamentul şi demonstraţiile concludente.

Mesajul lui Galilei e simplu – credea că geometria e instrumentul cu ajutorul căruia *se descoperă* noi adevăruri. Pe de altă parte, logica era pentru el mijlocul de *a evalua şi judeca* descoperirile deja făcute. În capitolul 7 vom examina o perspectivă diferită, potrivit căreia întreaga matematică provine din logică.

Cum a ajuns Galilei la ideea că matematica e limbajul naturii? La urma urmelor, o concluzie filosofică de asemenea anvergură nu putea să apară din senin. Într-adevăr, rădăcinile acestei concepţii pot fi găsite la Arhimede. Maestrul grec a fost primul care a folosit matematica pentru a explica fenomenele naturale. Apoi, pe o cale întortocheată trecând prin câţiva socotitori medievali şi matematicieni de curte italieni, natura matematicii a dobândit statutul de subiect demn de discuţie. Până la urmă, unii dintre matematicienii iezuiţi de pe vremea lui Galilei, în particular Christopher Clavius, au recunoscut şi ei faptul că matematica putea ocupa un loc între metafizică – principiile filosofice ale naturii fiinţei – şi realitatea fizică. În prefaţa („Prolegomena”) la *Comentarii asupra „Elementelor” lui Euclid,* Clavius scrie:

Din moment ce disciplinele matematice se ocupă cu lucruri considerate dezlegate de orice materie sensibilă, deşi sunt cufundate în lucrurile materiale, este limpede că ele deţin un loc intermediar între metafizică şi ştiinţele naturii, dacă luăm în considerare obiectele acestora.

Galilei nu a fost mulţumit cu ideea că matematica e doar un mijlocitor sau un transmiţător. A făcut mai departe pasul îndrăzneţ de a considera matematica drept limbă maternă a naturii. Această identificare a ridicat însă o altă problemă serioasă – una ce avea să aibă consecinţe dramatice asupra vieţii lui Galilei.

Ştiinţa şi teologia

Potrivit lui Galilei, Dumnezeu concepuse natura

folosind limbajul matematicii. Potrivit Bisericii Catolice, Dumnezeu era „autorul” Bibliei. Ce trebuia făcut în cazurile în care explicaţiile ştiinţifice bazate pe matematică păreau să contrazică Scripturile? Teologii Conciliului de la Trento din 1546 au răspuns în termeni fără echivoc: „Nimeni, întemeindu-se pe propria judecată şi deformând Sfintele Scripturi potrivit ideilor sale, nu va îndrăzni să le interpreteze în sens contrar celui dat de Sfânta Biserică, singura îndreptăţită să judece adevăratul lor sens şi înţeles”. În conformitate cu această afirmaţie, în 1616, când teologilor li s-a cerut să-şi exprime părerea despre cosmologia heliocentrică a lui Copernic, aceştia au conchis că era „eretică în mod oficial, căci contrazicea explicit, în multe locuri, sensul Sfintei Scripturi”. Cu alte cuvinte, fondul obiecţiei Bisericii faţă de adeziunea lui Galilei la teoria lui Copernic era sfidarea autorităţii Bisericii în interpretarea scripturilor, şi nu atât înlăturarea Pământului din poziţia sa centrală în cosmos. Într-un climat în care Biserica Catolică se simţea deja hărţuită de teologii Reformei, Galilei şi Biserica intrau în contradicţie directă.

Evenimentele s-au precipitat spre sfârşitul lui 1613. Benedetto Castelli, fost student al lui Galilei, face o prezentare a noilor descoperiri astronomice în faţa marelui duce al Toscanei şi a anturajului său. După cum era de bănuit, e obligat să explice evidentele discrepanţe dintre cosmologia copernicană şi unele relatări biblice, de pildă cea în care Dumnezeu opreşte în loc Soarele şi Luna pentru a le permite lui Iosua şi evreilor să-şi încheie victoria asupra amoriţilor în valea Aialon. Deşi Castelli spune că s-a „purtat ca un campion” în apărarea teoriei lui Copernic, Galilei e oarecum descumpănit de această confruntare şi se simte obligat să-şi exprime propriile vederi privind contradicţia dintre ştiinţă şi Sfintele Scripturi. Într-o lungă scrisoare către Castelli, datată 21 decembrie 1613, Galilei scrie:

[…] pentru a fi pe înţelesul mulţimii, Scriptura a socotit potrivit să spună multe lucruri, în aparenţă şi după

semnificaţia literală, diferite de adevărul absolut, în vreme ce natura este inexorabilă şi de neschimbat, şi deloc preocupată dacă acţiunile şi procedeele sale tainice sunt sau nu accesibile înţelegerii oamenilor (drept care ea nu încalcă niciodată legile ce-i sunt trasate); de aceea, aş zice că acele fenomene naturale, pe care ni le pune înaintea ochilor experienţa sensibilă sau ni le confirmă demonstraţiile necesare, nu trebuie cu niciun chip puse la îndoială pentru că anumite pasaje din Scriptură par să ne spună în cuvinte altceva: căci niciuna din afirmaţiile Scripturii nu este supusă unor restricţii atât de severe cum sunt supuse toate fenomenele naturii.[12]

Această interpretare a semnificaţiei biblice intra evident în contradicţie făţişă cu interpretarea unora dintre teologii mai stricţi. De pildă, dominicanul Domingo Bañez scria în 1584: „Sfântul Duh nu numai că a inspirat tot ce stă scris în Scriptură, dar a şi dictat şi impus fiecare cuvânt scris". Evident, Galilei nu era convins. În *Scrisoarea către Castelli* adaugă:

Eu aş crede că autoritatea Sfintei Scripturi a avut drept unic ţel să-i convingă pe oameni de acele precepte şi afirmaţii care, fiind indispensabile mântuirii lor şi mai presus de înţelegerea omenească, nu puteau deveni credinţă prin nicio altă învăţătură şi pe nicio altă cale decât doar prin glasul Sfântului Duh însuşi. Dar că acelaşi Dumnezeu care ne-a înzestrat cu simţuri, cu raţiune şi cu intelect a vrut – neluând în seamă folosirea acestor daruri – să ne dea pe altă cale cunoştinţele pe care le putem obţine prin ele, nu cred că e necesar să credem, şi cu atât mai puţin e de crezut un asemenea lucru în ştiinţele despre care Scriptura vorbeşte foarte puţin şi doar prin afirmaţii disparate; or tocmai acesta e cazul astronomiei, despre care se pomeneşte atât de puţin, încât nici măcar nu sunt amintite planetele.

O copie a scrisorii lui Galilei ajunge la Congregaţia Sfântului Oficiu din Roma, unde erau de obicei judecate

12 Acest fragment şi următorul: Galileo Galilei, *Scrisori copernicane,* Editura Humanitas, Bucureşti, 2010. *(N. t.)*

problemele legate de credinţă, şi mai ales ajunge la influentul cardinal Roberto Bellarmino (1542 – 1621). Reacţia iniţială a lui Bellarmino faţă de teoria copernicană fusese mai curând moderată, căci privise întregul model heliocentric ca pe „o cale de a salva aparenţele, la fel cum procedaseră cei care propuseseră epicicluri, dar nu credeau cu adevărat în existenţa lor”. Ca şi alţii înaintea sa, Bellarmino credea că modelele matematice propuse de astronomi sunt doar nişte născociri convenabile, menite să descrie ce observau oamenii, iară a fi ancorate în realitatea fizică. Asemenea stratageme de „salvare a aparenţelor”, susţinea el, nu demonstrează că Pământul se mişcă într-adevăr. Prin urmare, Bellarmino n-a văzut o ameninţare imediată venind din partea cărţii lui Copernic *(De Revolutionibus),* deşi a adăugat imediat că a pretinde că Pământul se mişca avea nu numai să-i „irite pe toţi învăţaţii filosofi şi teologi”, ci avea şi să „dăuneze Sfintei Credinţe făcând ca Sfânta Scriptură să treacă drept falsă”.

Amănuntele acestei tragice poveşti nu fac obiectul cărţii de faţă, aşa că nu le voi prezenta aici decât pe scurt. Congregaţia Indexului cărţilor interzise[13] a proscris cartea lui Copernic în 1616. Încercările ulterioare ale lui Galilei de a face apel la numeroase pasaje din cel mai respectat teolog antic – Sf. Augustin – pentru a-şi justifica interpretarea relaţiei dintre ştiinţele naturii şi Scriptură nu i-au atras prea multă simpatie. În pofida scrisorilor limpezi în care principala sa teză era aceea că nu există dezacord (altul decât unul superficial) între teoria copernicană şi textele biblice, teologii vremii au privit argumentele lui Galilei ca pe o incursiune nepoftită în teritoriul lor. Aceiaşi teologi nu ezitau însă să-şi dea cu părerea în chestiuni ştiinţifice.

Pe măsură ce nori negri se adunau la orizont, Galilei continua să creadă că raţiunea avea să precumpănească –

13 *Index librorum prohibitorum* sau *Index expurgatorius*, publicat prima dată în 1559 de Papa Paul IV la cererea Inchiziţiei, era o listă de cărţi interzise, fiind socotite de Biserica Catolică imorale şi contrare credinţei. Indexul a ieşit din uz în 1966. *(N. t.)*

greşeală uriaşă când e vorba să pui credinţa la încercare. Galilei publică *Dialog despre cele două mari sisteme ale lumii* în februarie 1632 (figura 20 înfăţişează frontispiciul primei ediţii). Acest text polemic constituie cea mai amănunţită expunere pe care Galilei o face ideilor copernicane. Mai mult, Galilei susţine că, urmând ştiinţa ce foloseşte limbajul echilibrului mecanic şi al matematicii, oamenii pot înţelege spiritul divin. Altfel spus, atunci când cineva găseşte soluţia unei probleme folosind proporţiile geometrice, înţelegerea la care ajunge e dumnezeiască. Reacţia Bisericii e promptă şi decisivă. Difuzarea *Dialogului* e interzisă în luna august a anului publicării sale. În luna următoare, Galilei este chemat la judecată la Roma pentru a se apăra de acuzaţiile de erezie. Galilei e adus la judecată pe 12 aprilie 1633 şi găsit „suspect de erezie" pe 22 iunie 1633. Judecătorul îl acuză pe Galilei „de a fi crezut şi susţinut doctrina – care e falsă şi contrară sfintelor şi dumnezeieştilor Scripturi – potrivit căreia Soarele este centrul lumii şi nu se mişcă de la est la vest, iar Pământul se mişcă şi nu este centrul lumii". Sentinţa e aspră:

Te condamnăm la închisoarea oficială a acestui Sfânt Oficiu pe o durată ce urmează să fie stabilită de noi şi, în chip de penitenţă, îţi poruncim ca timp de trei ani de-acum înainte să repeţi o dată pe săptămână cei şapte Psalmi de pocăinţă. Rămâne la latitudinea noastră să îndulcim, să comutăm sau să ridicăm, total ori parţial, pedeapsa şi penitenţa pomenite mai sus.

Distrus, Galilei, în vârstă de şaptezeci de ani, nu poate rezista presiunii. Cu sufletul frânt, Galilei adresează o scrisoare de abjurare, în care se angajează să „abandoneze complet falsa opinie potrivit căreia Soarele este în centrul lumii şi nu se mişcă, iar Pământul nu este centrul lumii şi se mişcă". El încheie astfel:

Prin urmare, dorind să înlătur din minţile Eminenţelor voastre, şi din cele ale tuturor creştinilor credincioşi, teribila bănuială ce planează asupra mea, cu inima sinceră şi neprefăcută credinţă abjur, blestem şi

detest erorile şi ereziile menţionate şi, în general, toate celelalte erori, erezii şi secte contrare Sfintei Biserici, şi jur ca în viitor să nu mai spun sau afirm vreodată, verbal sau în scris, nimic care ar putea da naştere unei bănuieli asemănătoare în ce mă priveşte.

Ultima carte a lui Galilei, *Discursuri şi demonstraţii matematice cu referire la două noi ştiinţe,* a fost publicată în 1638. Manuscrisul a fost strecurat în afara Italiei şi publicat la Leiden, în Olanda.

Figura 20

Conţinutul acestei cărţi exprima cu adevărat şi cu tărie sentimentul conţinut în legendarele cuvinte *„Eppur şi muove*" („Şi totuşi se mişcă"). Sfidătoarea frază, atribuită lui Galilei la sfârşitul judecării sale, n-a fost probabil pronunţată niciodată.

Pe 31 octombrie 1992, Biserica Catolică a decis în cele din urmă să-l „reabiliteze" pe Galilei. Recunoscând că Galilei avusese tot timpul dreptate, dar evitând mai departe o critică directă a Inchiziţiei, Papa Ioan Paul al II-lea a spus:

Paradoxal, Galilei, sincer credincios, s-a dovedit mai

perspicace în această temă [aparenta discrepanţă dintre ştiinţă şi Scriptură] decât adversarii săi teologi. Majoritatea teologilor nu au perceput distincţia formală care există între Scriptura în sine şi interpretarea sa, iar acest lucru i-a făcut să transfere pe nedrept pe tărâmul doctrinei religioase o temă care ţine de fapt de cercetarea ştiinţifică.

Ziarele din lumea întreagă s-au distrat pe cinste. *Los Angeles Times* a declarat: „Este oficial: Pământul se roteşte în jurul Soarelui, chiar şi pentru Vatican".

Mulţi însă nu s-au amuzat. Unii au considerat că această *mea culpa* a Bisericii era prea puţin şi venea prea târziu. Specialistul spaniol în Galilei Antonio Beltrán Mari observa:

Faptul că Papa se consideră o autoritate capabilă să spună ceva relevant despre Galilei şi ştiinţa acestuia arată că, din perspectiva Papei, nu s-a schimbat nimic. Se poartă exact la fel ca judecătorii lui Galilei, a căror greşeală o recunoaşte acum.

Ca să fim drepţi, Papa s-a aflat într-o situaţie în care nu putea câştiga. Orice hotărâre ar fi luat – fie că ignora problema şi menţinea condamnarea lui Galilei, fie că recunoştea greşeala Bisericii – ar fi fost probabil criticat. Totuşi, într-o epocă în care se fac încercări de a introduce creaţionismul biblic ca teorie „ştiinţifică" alternativă (sub titlul uşor voalat de „proiect inteligent") [14], e bine să ne amintim că Galilei a purtat deja această bătălie acum aproape patru sute de ani – şi a câştigat!

Capitolul 4

Magicienii: Scepticul şi uriaşul

Într-unul dintre cele şapte scheciuri din filmul *Tot ce aţi vrut să ştiţi despre sex, dar nu aţi avut curaj să întrebaţi,* Woody Allen joacă rolul unui bufon care se ţine de comicării la o curte medievală, spre amuzamentul regelui şi al anturajului său. Bufonul tânjeşte după regină,

14 Pentru problema „creaţionismului ştiinţific" vezi, de pildă, Michael Shermer, *De ce cred oamenii în bazaconii,* Editura Humanitas, Bucureşti, 2009. *(N. t.)*

aşa că îi dă acesteia un afrodiziac, sperând s-o seducă. Regina e atrasă de bufon, dar vai, poartă un lacăt uriaş la centura de castitate. Confruntat cu această situaţie frustrantă în dormitorul reginei, bufonul spune nervos: „Trebuie să găsesc rapid o soluţie, înainte ca Renaşterea să ajungă aici şi să pictăm *cu toţii”.* Lăsând gluma deoparte, această exagerare spune mult despre Europa secolelor XV şi XVI. Renaşterea a produs într-adevăr o asemenea bogăţie de capodopere în pictură, sculptură şi arhitectură, încât şi în ziua de azi aceste uimitoare opere de artă constituie o parte importantă a culturii noastre. În ştiinţă, Renaşterea a fost martora revoluţiei heliocentrice din astronomie, înfăptuită de Copernic, Kepler şi, mai ales, Galilei. Noua viziune asupra universului, posibilă graţie observaţiilor făcute de Galilei cu telescopul, şi descoperirile rezultate din experienţele sale de mecanică au stat la baza succeselor matematice din secolul următor. Odată cu primele semne de prăbuşire a filosofiei aristotelice şi cu contestarea ideologiei teologice a Bisericii, filosofii au început să caute o nouă temelie pe care să înalţe cunoaşterea umană. Matematica, având un corp de cunoştinţe în mod evident certe, oferea ceea ce părea a fi cea mai solidă bază pentru un nou început.

Cel care a preluat ambiţioasa sarcină de a descoperi o formulă care să disciplineze cumva întreaga gândire raţională şi să unifice întreaga cunoaştere, ştiinţa şi etica a fost tânărul ofiţer şi gentilom francez René Descartes.

Un visător

Mulţi consideră că Descartes (figura 21) a fost deopotrivă primul mare filosof modern şi primul biolog modern. Dacă adăugăm acestor impresionante recomandări faptul că filosoful empirist englez John Stuart Mill (1806 – 1873) a spus despre una dintre realizările matematice ale lui Descartes că este „cel mai măreţ pas făcut vreodată în progresul ştiinţelor exacte”, începem să ne dăm seama de imensa forţă intelectuală a lui Descartes.

René Descartes s-a născut pe 31 martie 1596 în comuna La Haye, în Franţa. În cinstea celui mai celebru

locuitor al său, comuna a fost rebotezată La Haye-Descartes în 1801, iar din 1967 se numeşte Descartes. La opt ani, Descartes intră la colegiul iezuit din La Flèche, unde studiază până în 1612 latina, matematica, limbile şi literaturile clasice, ştiinţa şi filosofia scolastică. Din pricina sănătăţii sale relativ fragile, Descartes e scutit de trezitul brutal la cinci dimineaţa, şi i se dă voie să-şi petreacă dimineaţa în pat. A continuat şi la maturitate să folosească prima parte a zilei pentru contemplaţie, şi i-a spus odată matematicianului francez Blaise Pascal că, pentru el, singura cale de a rămâne sănătos şi eficient era să nu se scoale niciodată până nu simte că o poate face fără să-l indispună. După cum vom vedea curând, această afirmaţie s-a dovedit a fi o profeţie tragică.

După La Flèche, Descartes a absolvit Universitatea din Poitiers devenind avocat, dar n-a practicat de fapt niciodată dreptul. Neastâmpărat şi curios să vadă lumea, Descartes se hotărăşte să se alăture armatei Principelui Mauriciu de Orania, care staţiona pe atunci la Breda în Provinciile Unite (Ţările de Jos). O întâlnire întâmplătoare în Breda avea să devină foarte importantă pentru

Figura 21

dezvoltarea intelectuală a lui Descartes. Potrivit

poveştii care s-a perpetuat, pe când hoinărea pe străzi, Descartes vede brusc o tablă ce părea să prezinte o problemă grea de matematică. Descartes îl opreşte pe primul trecător pentru a-i traduce textul din olandeză în latină sau franceză. Câteva ore mai târziu, Descartes reuşeşte să rezolve problema, convingându-se astfel că avea într-adevăr talent pentru matematică. Traducătorul se dovedeşte a fi nimeni altul decât matematicianul şi omul de ştiinţă olandez Isaac Beeckman (1588 – 1637), a cărui influenţă asupra studiilor lui Descartes în domeniul fizicii şi al matematicii a continuat ani de zile. În următorii nouă ani, Descartes oscilează între agitaţia pariziană şi serviciul militar în câteva armate. Într-o Europă pradă luptelor religioase şi politice şi începutului Războiului de Treizeci de Ani, este relativ uşor pentru Descartes să găsească bătălii sau batalioane în marş cărora să li se alăture, fie la Praga, fie în Germania, fie în Transilvania. De-a lungul acestei perioade continuă însă, după propriile-i spuse, „să fie cufundat până peste cap în studiul matematicii”.

Pe 10 noiembrie 1619, Descartes are trei vise care nu numai că aveau să aibă un efect zguduitor asupra restului vieţii sale, dar marchează, poate, începutul lumii moderne. Povestind mai târziu acest eveniment, Descartes spune într-una dintre notele sale: „Eram plin de entuziasm şi am descoperit fundamentele unei ştiinţe minunate”. Despre ce era vorba în aceste vise marcante?

De fapt, două fuseseră coşmaruri. În primul vis, Descartes este prins într-un vârtej de vânt care îl face să se răsucească violent pe călcâiul stâng. Este de asemenea îngrozit de o senzaţie continuă de cădere la fiecare pas. Apare un bătrân care încearcă să-i arate un pepene dintr-o ţară străină. Al doilea vis e o altă viziune înspăimântătoare: este prizonier într-o încăpere în care se aud tunete şi în toate direcţiile zboară scântei rău prevestitoare. În perfectă opoziţie cu primele două, cel de-al treilea vis e imaginea însăşi a calmului şi meditaţiei. Pe măsură ce ochii săi se plimbă prin încăpere, Descartes vede cărţi apărând şi dispărând pe o masă. Printre ele se

afla o antologie de poezii intitulată *Corpus poetarum* şi o enciclopedie. Deschide antologia la întâmplare şi ochii îi cad pe primul vers al unei poezii aparţinând poetului roman din secolul IV Ausonius. Scria aşa: *„Quod vitae sectabor iter?”* („Ce drum ar trebui să apuc în viaţă?”) În mod miraculos, apare din văzduh un bărbat care citează alt vers: *„Est et non”* („Da şi nu” sau „Este şi nu este”). Descartes vrea să-i arate versul lui Ausonius, dar întreaga viziune dispare în neant.

Cum se întâmplă de obicei cu visele, semnificaţia lor nu rezidă atât în conţinutul propriu-zis, care este adesea bizar şi greu de înţeles, cât în interpretarea pe care visătorul alege să i-o dea. În cazul lui Descartes, efectul acestor trei vise enigmatice a fost uimitor. El a atribuit enciclopediei înţelesul cunoaşterii ştiinţifice colective, iar antologiei de poezie pe acela de a întruchipa filosofia, revelaţia şi entuziasmul. Prin „Da şi nu” – faimoasele contrarii ale lui Pitagora – a înţeles reprezentarea adevărului şi a falsului. (Deloc surprinzător, unele interpretări psihanalitice au sugerat conotaţii sexuale legate de pepene.) Descartes era absolut convins că visele îl îndrumau în direcţia unificării cunoaşterii umane prin mijloacele raţiunii. Şi-a dat demisia din armată în 1621, dar a continuat să călătorească şi să studieze matematica în următorii cinci ani. Toţi cei care l-au întâlnit pe Descartes în acea vreme, inclusiv influentul cardinal Pierre de Berule (1575 – 1629), au fost adânc impresionaţi de pătrunderea şi limpezimea gândirii sale. Mulţi l-au încurajat să-şi publice ideile. Cu orice alt tânăr, asemenea înţelepte sfaturi părinteşti puteau avea acelaşi efect contrar ca sfatul într-un singur cuvânt în privinţa carierei, „Plasticul!”, asupra personajului Dustin Hoffman din filmul *Absolventul,* dar Descartes era altfel.

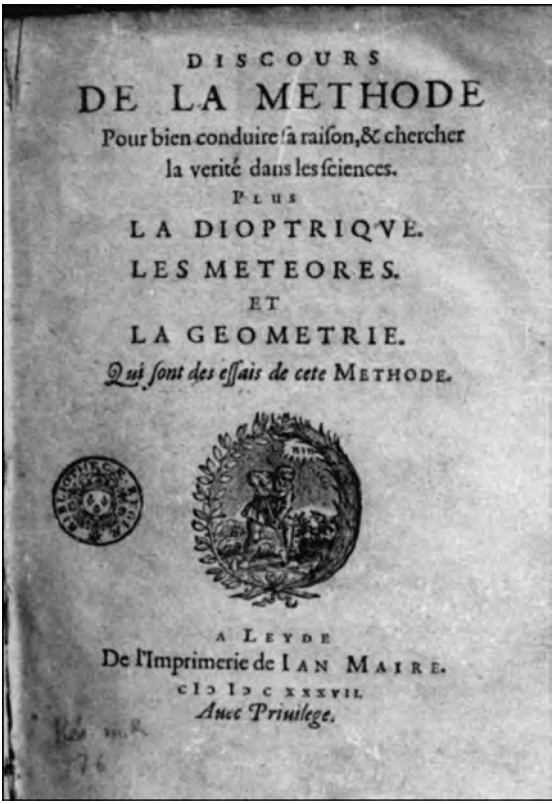

DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon,& chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
clɔ Iɔ c xxxvii
Auec Priuilege.

Figura 22

Fiind deja dedicat căutării adevărului, era uşor de convins. S-a mutat în Olanda, care părea să ofere, la acea vreme, o atmosferă intelectuală mai liniştită, iar următorii douăzeci de ani sunt excepţional de rodnici.

Descartes îşi publică prima capodoperă privind bazele ştiinţei, *Discurs despre metodă,* în 1637 (figura 22 înfăţişează frontispiciul primei ediţii). Trei anexe – despre optică, meteorologie şi geometrie – însoţesc acest tratat. Urmează în 1641 o operă filosofică, *Meditaţii metafizice,* iar, în 1644, una de fizică, *Principiile filosofiei.* Pe atunci, Descartes era deja faimos în toată Europa, printre admiratorii şi corespondenţii săi numărându-se principesa Elizabeta a Boemiei (1618 – 1680), aflată în exil. În 1649, Descartes e invitat s-o instruiască în domeniul filosofiei pe încântătoarea regină Cristina a Suediei (1626 – 1689).

Având dintotdeauna o slăbiciune pentru capetele încoronate, Descartes acceptă. De fapt, scrisoarea sa către regină era atât de încărcată de expresiile veneraţiei curtenitoare din secolul XVII, încât astăzi sună pur şi simplu ridicol: „Îndrăznesc să afirm aici că Majestatea Voastră nu-mi poate porunci niciun lucru atât de anevoios încât să nu fiu gata să fac tot ce este cu putinţă pentru a-l înfăptui, şi că, chiar de m-aş fi născut suedez ori finlandez, n-aş fi dovedit mai mult zel şi n-aş fi fost mai potrivit [pentru Majestatea Voastră] decât sunt”. Regina cu voinţă de fier, în vârstă de douăzeci şi trei de ani, insistă ca Descartes să-i dea lecţii la diabolica oră cinci dimineaţa. Într-o ţară atât de rece, încât chiar şi gândurile îngheţau, după cum îi scrie Descartes unui prieten, această împrejurare se dovedeşte fatală. „Sunt în afara elementului meu aici”, scrie Descartes, „şi nu-mi doresc decât linişte şi odihnă, bunuri pe care nici cei mai puternici regi de pe pământ nu le pot acorda celor ce nu pot să le obţină pentru ei înşişi”. După numai câteva luni de înfruntare a asprei ierni suedeze la acele ore întunecate ale dimineţii pe care reuşise să le evite toată viaţa, Descartes se îmbolnăveşte de pneumonie. Moare la cincizeci şi trei de ani, pe 11 februarie 1650, la ora patru dimineaţa, ca şi cum ar fi încercat să evite o altă chemare la trezire. Cel a cărui operă anunţa epoca modernă cade victimă propriilor sale aplecări spre snobism şi capriciilor unei tinere regine.

Descartes a fost înmormântat în Suedia, dar rămăşiţele sale, sau o parte dintre ele, au fost aduse în Franţa în 1667. Acolo, rămăşiţele au fost mutate de multe ori, până când au fost îngropate într-una din capelele catedralei Saint-Germain-des-Prés pe 26 februarie 1819. Figura 23 mă înfăţişează lângă placa neagră, simplă care îl comemorează pe Descartes. Un craniu pretins a fi al lui Descartes a trecut din mână în mână în Suedia până când a fost cumpărat de un chimist pe nume Berzelius, care l-a adus în Franţa. Craniul se află acum la Muzeul Ştiinţelor Naturale, care face parte din Muzeul Omului de la Paris.

Craniul este adesea expus faţă în faţă cu craniul unui om de Neanderthal.

Figura 23

Un modern

Eticheta de „modern” aplicată unui om îi desemnează de regulă pe aceia care pot conversa firesc cu colegii lor de breaslă din secolul XX (sau, acum, XXI). Ceea ce-l face pe Descartes cu adevărat modern este faptul că a îndrăznit *să pună la îndoială* toate afirmaţiile filosofice şi ştiinţifice dinaintea sa. El a spus odată că educaţia i-a servit doar pentru a-i stârni perplexitatea şi a-l face conştient de ignoranţa sa. În celebrul său *Discurs despre metodă,* scrie: „[…] filosofia a fost cultivată de spiritele cele mai alese ale secolelor trecute şi totuşi […] nu există vreun lucru care să nu fie subiect de dispută, şi, în consecinţă, să fie indubitabil […].”[15] Dacă soarta multora dintre ideile filosofice ale lui Descartes nu avea să fie prea diferită, căci neajunsuri importante ale afirmaţiilor sale au fost subliniate de filosofii care i-au urmat, scepticismul său

15 Pentru acest citat şi pentru următoarele: Descartes, *Discurs despre metodă,* Editura Academiei, Bucureşti, 1990. *(N. t.)*

mereu viu faţă de chiar cele mai simple concepte îl face cu siguranţă modern până în măduva oaselor. Şi, mai important din perspectiva cărţii de faţă, Descartes a recunoscut că metodele şi procesul raţionamentului din matematică duc tocmai la acel tip de *certitudine* care le lipsea filosofilor scolastici dinaintea lui. S-a exprimat limpede:

Aceste lungi şiruri de explicaţii foarte simple şi la îndemână, de care geometrii obişnuiesc să se slujească pentru a reuşi în demonstraţiile lor cele mai dificile, mi-au oferit prilejul să-mi închipui *că toate lucrurile ce intră în sfera cunoaşterii umane se înlănţuie în acelaşi fel* [s. m.], cu condiţia de a nu considera drept adevărat ceva ce nu este şi de a păstra întotdeauna ordinea de deducere a unora din altele; în consecinţă, nu pot exista lucruri oricât de îndepărtate la care să nu ajungem şi oricât de ascunse pe care să nu le descoperim.

Această afirmaţie îndrăzneaţă merge, într-un fel, chiar dincolo de ideile lui Galilei. Nu numai universul fizic e scris în limbaj matematic, ci întreaga cunoaştere omenească urmează logica matematicii: „[…] socotesc [metoda matematicii] mai de preţ decât orice altă cunoştinţă transmisă nouă pe căi omeneşti, deoarece ea e izvorul tuturor cunoştinţelor, după câte îmi dau seama.”[16] Prin urmare, unul dintre scopurile lui Descartes a devenit demonstrarea faptului că lumea fizică – pentru el, o realitate ce putea fi descrisă matematic – putea fi reprezentată fără a fi nevoie să ne sprijinim pe vreuna dintre adesea înşelătoarele noastre percepţii senzoriale. El susţinea că mintea trebuie să filtreze ceea ce ochii văd şi să transforme percepţiile în idei. La urma urmelor, spune Descartes, „nu pot deosebi niciodată prin semne sigure veghea de somn”. Dar, se întreabă Descartes, dacă tot ce percepem ca realitate e de fapt doar un vis, cum putem şti dacă însuşi Pământul şi cerul nu sunt decât „înşelări ale somnului” aşezate în simţurile noastre de vreun „geniu rău

16 Descartes, *Reguli de îndrumare a minţii. Meditaţii despre filozofia primă,* Editura Humanitas, Bucureşti, 2004. *(N. t.)*

[…] deosebit de puternic şi iscusit”? Sau, după cum spunea Woody Allen: „Şi dacă totul nu-i decât o iluzie şi nimic nu există? În cazul ăsta, e clar că am dat prea mulţi bani pe covor”. Pentru Descartes, acest potop de îndoieli tulburătoare a produs până la urmă ceea ce avea să devină cea mai memorabilă afirmaţie a sa: *cogito ergo sum* (gândesc, deci exist). Cu alte cuvinte, în spatele gândurilor trebuie să se afle un spirit conştient. Paradoxal, faptul de a te îndoi nu poate fi pus el însuşi la îndoială! Descartes a încercat să folosească acest aparent firav început pentru a construi un plan complet al cunoaşterii sigure. Şi-a încercat puterile în filosofie, optică, mecanică, medicină, embriologie şi meteorologie, şi a avut realizări de oarecare importanţă în toate aceste discipline. Cu toate acestea, în pofida insistenţei sale privind capacitatea umană de a raţiona, Descartes nu credea că logica singură putea dezvălui adevărurile fundamentale. Ajungând, în esenţă, la aceleaşi concluzii ca şi Galilei, observă: „[…] în ce priveşte logica, silogismele şi majoritatea celorlalte reguli ale sale servesc mai degrabă la a explica lucruri care se ştiu […] decât la a le învăţa”. În schimb, prin eroica sa întreprindere de a reinventa sau stabili fundamentele unor întregi discipline, Descartes a încercat să folosească principiile pe care le distilase din metoda matematică pentru a se asigura că se afla pe un teren ferm. A prezentat aceste instrucţiuni riguroase în *Reguli de îndrumare a minţii.* El a început cu adevăruri de care nu se îndoia (asemănătoare axiomelor din geometria euclidiană); a încercat să descompună problemele dificile în unele cu care se opera mai uşor; a pornit de la simplu pentru a ajunge la complicat; a verificat încă o dată întregul procedeu pentru a se asigura că nu ignorase nicio soluţie posibilă. Inutil să spunem că nici măcar acest procedeu atent elaborat şi laborios nu putea face concluziile lui Descartes imune la eroare. De fapt, deşi Descartes este cunoscut mai cu seamă pentru monumentalele sale contribuţii în filosofie, descoperirile sale cele mai durabile au fost în matematică. Mă voi concentra acum în particular

asupra strălucitei şi simplei sale idei pe care John Stuart Mill a considerat-o „cel mai măreţ pas făcut vreodată în progresul ştiinţelor exacte”.

Matematica unei hărţi a oraşului New York

Priviţi harta parţială a Manhattanului din figura 24. Dacă vă aflaţi la intersecţia Străzii 34 cu Eight Avenue şi trebuie să vă întâlniţi cu cineva la intersecţia Străzii 59 cu Fifth Avenue, nu veţi avea nicio problemă să găsiţi drumul, nu-i aşa? Aceasta este esenţa ideii lui Descartes privind o nouă geometrie. El a schiţat-o într-o anexă de 106 pagini la *Discursul despre metodă,* intitulată *la géometrie (Geometria).* Această idee remarcabil de simplă a revoluţionat matematica. Descartes a pornit de la observaţia aproape banală că, aşa cum se vede în harta Manhattanului, o pereche de numere în plan poate determina fără ambiguitate poziţia unui punct (de exemplu, punctul A din figura 25 a). A folosit apoi acest lucru pentru a elabora o foarte riguroasă teorie a curbelor – *geometria*

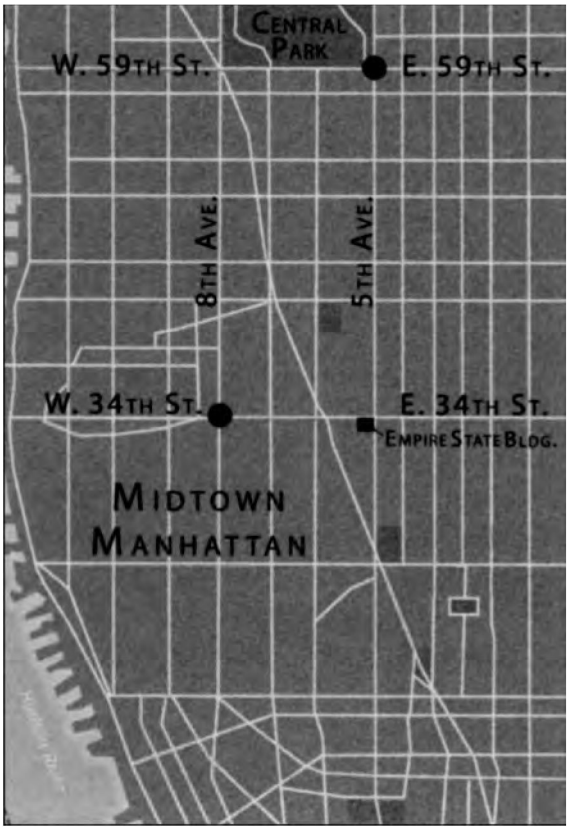


Figura 24

analitică. În amintirea lui Descartes, perechea de linii drepte care se intersectează pentru a ne da un sistem de referinţă este cunoscută astăzi sub numele de *sistem de coordonate carteziene.* În mod tradiţional, linia orizontală este numită „axa x”, cea verticală „axay”, iar punctul lor de intersecţie „origine”. Punctul notat „A” în figura 25 a, de pildă, are coordonata *x* egală cu 3 şi coordonata *y* egală cu 5, ceea ce se notează simbolic prin perechea ordonată de numere (3, 5). (Observaţi că originea este desemnată prin (0,0) Să presupunem acum că vrem să caracterizăm cumva toate punctele planului care se afla la o distanţă de 5 unităţi faţă de origine. Desigur, aceasta e tocmai definiţia unui cerc cu centrul în origine, cu o rază de cinci unităţi (figura 25 b). Dacă luăm punctul (3, 4) pe acest cerc,

găsim că relaţia 32 + 42 = 52 este satisfăcută de coordonatele sale. De fapt, este uşor de arătat (folosind teorema lui Pitagora) că perechea de coordonate (x, *y)* ale oricărui punct de pe acest cerc satisface ecuaţia x2 + y2 = 52. Mai mult, punctele de pe cerc sunt singurele puncte din plan pentru ale căror coordonate este adevărată această ecuaţie (x2 + y2 = 52). Ceea ce înseamnă că ecuaţia algebrică x2 + y2 = 52 determină în mod exact şi unic acest cerc. Cu alte cuvinte, Descartes a descoperit o cale de a reprezenta o curbă geometrică printr-o ecuaţie algebrică, sau numeric, şi viceversa. Poate că acest lucru nu e prea incitant pentru un simplu cerc, dar orice grafic pe care îl veţi fi văzut vreodată, de la suişurile şi coborâşurile bursei la temperatura Polului Nord în secolul trecut sau la viteza de expansiune a universului, se bazează pe ingenioasa idee a lui Descartes. Brusc, geometria şi algebra nu mai erau două ramuri separate ale matematicii, ci două reprezentări ale aceloraşi adevăruri. Ecuaţia unei curbe conţine implicit toate proprietăţile imaginabile ale curbei, inclusiv, de pildă.

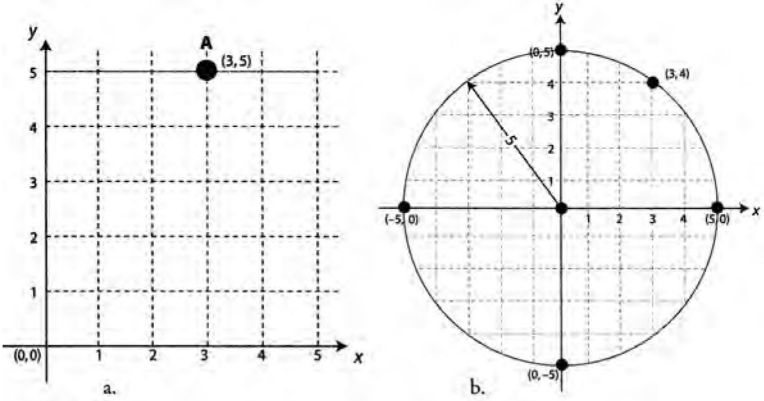


Figura 23

toate teoremele geometriei euclidiene. Şi asta nu e tot. Descartes a arătat că diferite curbe pot fi desenate în acelaşi sistem de coordonate, iar punctele lor de intersecţie pot fi determinate simplu prin găsirea soluţiei comune ecuaţiilor algebrice ale acestora. Astfel, Descartes

a reuşit să exploateze forţa algebrei pentru a corecta ceea ce el considera a fi slăbiciunile geometriei clasice. De pildă, Euclid definea punctul ca pe o entitate fără părţi componente şi fără mărime. Această definiţie mai curând obscură a ieşit din uz pentru totdeauna odată ce Descartes a definit simplu punctul în plan ca perechea de numere ordonate (x, y). Dar chiar şi aceste idei noi erau abia vârful aisbergului. Dacă două cantităţi *x* şi *y* pot fi legate astfel încât oricărei valori a lui *x* să-i corespundă o unică valoare a lui y, atunci ele constituie o *funcţie,* iar funcţiile sunt cu adevărat ubicue. Fie că vă supravegheaţi greutatea zilnică atunci când urmaţi un regim, greutatea copilului în fiecare an sau dependenţa consumului de benzină al maşinii de viteza cu care conduceţi, toate datele pot fi reprezentate prin funcţii.

Funcţiile sunt cu adevărat pâinea cea de toate zilele a oamenilor de ştiinţă, statisticienilor şi economiştilor moderni. Odată ce experienţe sau observaţii ştiinţifice repetate produc aceeaşi relaţie funcţională, acestea pot atinge statutul înalt de legi ale naturii – descrieri matematice ale unui comportament de care ascultă toate fenomenele naturii. De pildă, legea gravitaţiei, descoperită de Newton, la care vom reveni în acest capitol, afirmă că, atunci când distanţa dintre două mase punctiforme se dublează, atracţia gravitaţională dintre ele scade de patru ori. Aşadar, ideile lui Descartes au deschis poarta sistematizării matematice a aproape tot ce există – esenţa însăşi a ideii de Dumnezeu-matematician. Din punct de vedere strict matematic, prin stabilirea echivalenţei între cele două perspective ale matematicii (algebrică şi geometrică) considerate înainte disjuncte, Descartes a extins orizontul matematicii şi a pavat drumul spre arena modernă a *analizei,* care le-a permis matematicienilor să treacă uşor de la un subdomeniu matematic la altul. Prin urmare, nu numai diverse fenomene au putut fi descrise de matematică, dar matematica însăşi a devenit mai vastă, mai bogată şi mai unificată. După cum spunea marele matematician Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813): „Atâta

timp cât algebra şi geometria au mers pe drumuri separate, au înaintat încet, iar aplicaţiile lor au fost limitate. Dar când aceste două ştiinţe s-au reunit, au extras una de la alta forţe proaspete, iar de-atunci încoace au înaintat în ritm rapid spre desăvârşire".

Contribuţiile lui Descartes în matematică au fost importante, dar el nu s-a mărginit la acest domeniu. Ştiinţa, spunea Descartes, e asemeni unui arbore, metafizica fiind rădăcinile, fizica trunchiul, iar mecanica, medicina şi morala cele trei ramuri principale. Alegerea ramurilor poate părea la prima vedere surprinzătoare, dar ele reprezintă cele trei domenii principale în care Descartes a vrut să-şi aplice noile idei: universul, corpul omenesc şi îndrumarea vieţii. Descartes şi-a petrecut primii patru ani de şedere în Olanda – din 1629 până în 1633 – scriind tratatul de cosmologie şi fizică, *Le monde (Lumea).* Chiar în momentul în care cartea era gata pentru tipar, Descartes a fost şocat de nişte veşti tulburătoare. Într-o scrisoare către filosoful naturii Marin Mersenne (1588 – 1648) se plânge:

Aveam intenţia să vă trimit *Lumea* drept cadou de Crăciun, iar cu numai două săptămâni în urmă eram foarte hotărât să vă trimit cel puţin o parte a ei, dacă întreaga lucrare n-ar fi apucat să fie copiată. Dar trebuie să spun că, între timp, m-am interesat la Leiden şi Amsterdam dacă putea fi găsit *Sistemul lumii* al lui Galilei, căci îmi trecuse pe la ureche că fusese publicat anul trecut în Italia. Mi s-a spus că a fost într-adevăr publicat, dar toate exemplarele au fost imediat arse la Roma, iar Galilei condamnat şi amendat. Am rămas atât de înmărmurit aflând acest lucru, încât aproape că m-am hotărât să-mi ard toate hârtiile, sau cel puţin să nu las pe nimeni să le vadă. Fiindcă nu mi-am putut închipui că el – fiind italian şi, din câte înţeleg, în graţiile Papei – a putut fi considerat criminal fără alt motiv decât acela de a fi încercat, după cum fără îndoială a şi făcut, să arate că Pământul se mişcă. Ştiu că unii cardinali criticaseră deja această idee, şi totuşi mi s-a părut că am auzit că lucrul acesta era predat public la Roma. *Trebuie*

să recunosc că, dacă ideea e falsă, la fel sunt toate fundamentele filosofiei mele [s. m.], căci ea se poate demonstra limpede pornind de la ele. Şi este atât de strâns întreţesută în fiecare parte a tratatului meu, încât n-o pot suprima fără a-mi compromite întreaga lucrare. Dar pentru nimic în lume n-aş vrea să public un discurs în care poate fi găsit chiar şi un singur cuvânt pe care Biserica l-ar dezaproba; aşa că, decât să-l public într-o formă mutilată, am preferat să renunţ.

Descartes a abandonat într-adevăr *Lumea* (manuscrisul incomplet a fost până la urmă publicat în 1664), dar a inclus majoritatea rezultatelor în *Principiile filosofiei,* apărută în 1644. În acest discurs sistematic, Descartes prezintă legile naturii pe care le-a descoperit, precum şi teoria vârtejurilor. Două dintre legile sale se apropie mult de faimoasele prime două legi ale mişcării enunţate de Newton, dar celelalte sunt în realitate greşite. Teoria vârtejurilor presupune că Soarele se află în centrul unei vâltori create în materia cosmică continuă. Ea presupune că planetele sunt antrenate de acest vârtej ca frunzele în bulboana formată de un râu. Planetele, la rândul lor, se presupunea că formau propriile lor vârtejuri secundare antrenând sateliţii în jurul lor. Deşi teoria vârtejurilor era spectaculos de falsă (după cum avea să sublinieze mai târziu nemilos Newton), ea era totuşi interesantă, fiind prima încercare serioasă de a formula o teorie a universului ca întreg, întemeiată pe aceleaşi legi care se aplică şi la suprafaţa Pământului. Cu alte cuvinte, pentru Descartes nu exista nicio diferenţă între fenomenele terestre şi cele cereşti – Pământul făcea parte dintr-un univers care asculta de legi fizice uniforme. Din nefericire, Descartes şi-a ignorat propriile principii în construirea unei teorii detaliate care nu se baza nici pe o matematică necontradictorie, nici pe observaţii. Cu toate acestea, scenariul lui Descartes, în care Soarele şi planetele perturbau cumva liniştita materie din jur, conţinea unele elemente ce aveau să devină mai târziu piatra de temelie a teoriei einsteiniene a gravitaţiei. În

teoria generală a relativităţii, gravitaţia nu este o forţă misterioasă care acţionează pe distanţe mari în spaţiu, ci corpurile masive de tipul Soarelui sunt cele care deformează spaţiul din vecinătatea lor, la fel cum o bilă de popice ar provoca afundarea unei plase elastice. Planetele urmează atunci pur şi simplu cele mai scurte traiectorii posibile în acest spaţiu deformat.

În această scurtă prezentare a ideilor lui Descartes am lăsat anume deoparte aproape întreaga sa operă filosofică, pentru că ea ne-ar fi îndepărtat prea mult de problema naturii matematicii (mă voi întoarce mai târziu la unele dintre ideile sale despre Dumnezeu). Nu mă pot abţine totuşi să includ următorul comentariu amuzant scris de matematicianul britanic Walter William Rouse Ball (18501925) în 1908:

Cât despre teoriile sale [ale lui Descartes] filosofice, e suficient să spunem că a discutat aceleaşi probleme care fuseseră dezbătute în ultimele două mii de ani, şi care vor fi dezbătute cu acelaşi zel două mii de ani de-acum încolo. Inutil să spunem că problemele însele sunt importante şi interesante, dar, prin natura lor, nicio soluţie oferită vreodată nu poate fi confirmată sau infirmată ferm; tot ce putem obţine este să spunem că o explicaţie e mai probabilă decât alta, iar ori de câte ori un filosof precum Descartes a crezut că a lămurit în fine o problemă, urmaşii săi au găsit o eroare ascunsă în presupuneri. Am citit undeva că filosofia a fost întotdeauna preocupată în cel mai înalt grad de raporturile dintre Dumnezeu, Natură şi Om. Primii filosofi au fost grecii care se ocupau mai ales cu relaţiile dintre Dumnezeu şi Natură, şi tratau Omul separat. Biserica Creştină a fost atât de absorbită de relaţia dintre Dumnezeu şi Om, încât a neglijat complet Natura. În sfârşit, filosofii moderni s-au preocupat mai ales de relaţiile dintre Om şi Natură. Nu vreau să discut aici dacă aceasta e o generalizare corectă istoric a perspectivelor succesiv predominante, dar afirmaţia privind scopul filosofiei moderne marchează limitările scrierilor lui Descartes.

Descartes şi-a încheiat cartea despre geometrie cu cuvintele: „Sper ca posteritatea să mă judece blând, nu numai pentru lucrurile pe

Livre Troisies me. + IJ

les Problèmes d va mefine genre, iay tout enfemble donné la façon de les réduire à vue infinité d'autres dioerfes; & ainfi de refondre chafcun deux en me infinité de façons. Puis outre cela cu'ayant confirmait tous ceux qui font plâns, en coupant d vă cercle une ligne droite; & tous ceux qui font folides, en coupant aufiy d vă cercle une Parabole; & enfin tous ceux qui font d va degré plus compofcă, encoupanc tout de mefine d vă cercle une ligne qui n'est que d va degré plus compofeé que la Paraboleil ne faut que fuiure la mefine voye pour conftruire tous ceux qui font plus compofés à l'infini. Car en matière de progreffions Mathématiques. lorfqu'on a les deux ou trois premiers termes, îl n eft pas malayfe de trouuer les autres. Etfeipere que nos neueux me fçauront gré, non feulement des chofes que iay icy expliquées. mais aufly de celles que iay omifes volontairerement, affin de leurlaif Ter leplaifirdelesinuenter.

F I.N.

Figura 26

care le-am explicat, ci şi pentru cele pe care le-am omis intenţionat, spre a lăsa altora plăcerea de a descoperi" (figura 26). Nu putea şti că cineva care avea numai opt ani la moartea lui Descartes va duce cu un pas uriaş înainte ideea că matematica e nucleul ştiinţei. Acest geniu neîntrecut a avut ocazia să simtă „plăcerea de a descoperi" pesemne mai mult decât orice alt om din istoria omenirii.

Şi a fost lumină

Alexander Pope, marele poet din secolul XVIII, avea treizeci şi nouă de ani la moartea lui Isaac Newton (1642 – 1727) (figura 27 înfăţişează mormântul lui Newton din Catedrala Westminster). În două versuri binecunoscute,

Pope a încercat să cuprindă înfăptuirile lui Newton:

Natura şi ale ei legi zăceau ascunse-n noapte:
Zis-a Dumnezeu: Să fie Newton! şi totul s-a luminat.

La aproape o sută de ani de la moartea lui Newton, Lord Byron (1788 – 1824) a pus în poemul său epic *Don Juan* următoarele versuri:

De la Adam încoace, e singurul muritor Ce poate înfrunta o cădere sau un măr.

Pentru generaţiile de savanţi care i-au urmat, Newton a fost şi rămâne într-adevăr o figură legendară, dincolo de mituri. Faimosul

Figura 27 citat din Newton „Dacă am văzut mai departe este pentru că m-am urcat pe umerii unor uriaşi” este adesea prezentat ca un model de generozitate şi modestie pe care e de aşteptat să le demonstreze oamenii de ştiinţă atunci când e vorba de marile lor descoperiri. De fapt, Newton a scris probabil această frază ca un răspuns sarcastic voalat la o scrisoare din partea celui pe care îl privea ca pe principalul său inamic ştiinţific, prolificul fizician şi biolog Robert Hooke (1635 – 1703). Hooke îl acuzase pe Newton în mai multe rânduri că i-a furat ideile, întâi cu privire la teoria luminii, apoi cu privire la gravitaţie. Pe 20 ianuarie 1676, Hooke adoptă un ton mai împăciuitor, declarând într-o scrisoare personală către

Newton: „Concepţiile dumneavoastră şi ale mele [privind teoria luminii] ţintesc amândouă, presupun, către acelaşi ţel care este descoperirea adevărului şi presupun că amândoi putem suporta să auzim obiecţii”. Newton hotărăşte să intre în joc. În răspunsul său la scrisoarea lui Hooke, datat 5 februarie 1676, scrie: „Ce a făcut descartes [Descartes] este un pas bun [referindu-se la ideile lui Descartes despre lumină]. Dumneavoastră aţi adăugat mult pe diverse căi, mai cu seamă luând în considerare din punct de vedere filosofic culorile foilor subţiri. Dacă am văzut mai departe, este pentru că eu m-am urcat pe umerii unor uriaşi”. Deoarece Hooke era foarte scund şi cocoşat, cel mai cunoscut citat din Newton poate să însemne că acesta simţea că nu-i datora absolut nimic lui Hooke! Faptul că Newton nu a pierdut nicio ocazie de a-l insulta pe Hooke, afirmaţia că propria sa teorie a distrus „tot ce el [Hooke] a spus” şi refuzul său de a da la tipar propria sa carte despre lumină, *Optica,* înainte de moartea lui Hooke, sunt argumente care sugerează că această interpretare nu e prea trasă de păr. Vrajba dintre cei doi oameni de ştiinţă a atins o culme şi mai înaltă când s-a ajuns la teoria gravitaţiei. Când Newton a auzit că Hooke se pretindea a fi descoperitorul legii gravitaţiei, a şters meticulos şi răzbunător până la ultima referinţă numele lui Hooke din ultima parte a cărţii sale pe această temă. Newton i-a scris prietenului său astronomul Edmond Halley (1656 – 1742) pe 20 iunie 1686:

[Hooke] ar fi trebuit mai curând să-şi ceară scuze pentru nepriceperea sa. Căci e limpede după spusele lui că nu era în stare să se descurce. Dar nu e oare ciudat? Matematicienii care descoperă, demonstrează şi fac toată munca trebuie să se mulţumească cu statutul de socotitori şi salahori prăfuiţi, în vreme ce altul care nu face nimic, dar pretinde şi înşfacă totul, trebuie să-şi atribuie toate invenţiile, atât cele din viitor, cât şi cele din trecut.

Newton spune fără înconjur de ce crede că Hooke n-are niciun merit – n-a fost în stare să-şi formuleze ideile în limbaj matematic. Într-adevăr, caracteristica esenţială a

teoriilor lui Newton – cea care le-a făcut să fie adevărate legi ale naturii – a fost tocmai faptul că toate erau exprimate ca relaţii matematice coerente şi de o limpezime cristalină. Prin comparaţie, ideile teoretice ale lui Hooke, oricât de ingenioase ar fi fost în multe cazuri, nu păreau decât o colecţie de intuiţii, ipoteze şi speculaţii.

În paranteză fie spus, procesele-verbale ale Societăţii Regale din perioada 1661 – 1682, mult timp considerate pierdute, au reapărut brusc în februarie 2006. Caietul, conţinând peste 520 de pagini scrise de mâna lui Robert Hooke însuşi, a fost găsit într-o casă din Hampshire, Anglia, unde se crede că au fost păstrate într-un dulap vreme de vreo cincizeci de ani. Procesul-verbal din decembrie 1679 prezintă corespondenţa dintre Hooke şi Newton, în care discutaseră un experiment care să confirme rotaţia Pământului.

Întorcându-ne la lovitura de maestru a lui Newton, trebuie spus că acesta a preluat concepţia lui Descartes – potrivit căreia cosmosul poate fi descris de matematică – şi a transformat-o într-o realitate operaţională. În prefaţa la monumentala sa lucrare *Principiile matematice ale filosofiei naturale* (în latină, *Philosophiae naturalis principia mathematica* şi cunoscută îndeobşte ca *Principia*), afirma:

Prezentăm această lucrare drept principiile matematice ale filosofiei, căci întreaga sarcină a filosofiei pare să constea în aceasta – pornind de la fenomenele mişcărilor să cercetăm forţele naturii, iar apoi, pornind de la aceste forţe, să demonstrăm celelalte fenomene: către acest scop se îndreaptă propoziţiile generale din prima şi din a doua carte. În cartea a treia dăm drept exemplu pentru aceasta explicarea Sistemului Lumii; căci, cu ajutorul propoziţiilor demonstrate matematic în precedentele cărţi, în cea de-a treia deducem din fenomenele cereşti forţa gravitaţiei cu care corpurile tind către Soare şi către cele câteva planete. Apoi, pornind de la aceste forţe, prin alte propoziţii care sunt şi ele matematice, deducem mişcarea planetelor, a cometelor, a

Lunii şi a mării.

Când ne dăm seama că Newton a înfăptuit într-adevăr în *Principia* tot ce promisese în prefaţă, nu putem decât să ne minunăm. Există aici şi o trimitere răutăcioasă Descartes: titlul ales, *Principiile matematice,* în contrast cu *Principiile filosofiei* lui Descartes. Newton a adoptat acelaşi raţionament matematic şi aceeaşi metodologie chiar şi în cartea sa despre lumină, *Optica,* mai mult întemeiată pe experienţe. Cartea începe astfel: „Scopul meu în această carte nu este să explic prin ipoteze proprietăţile luminii, ci să le propun şi să le demonstrez prin raţiune şi experimente: drept care voi postula următoarele definiţii şi axiome". După care continuă ca şi cum ar fi o carte de geometrie euclidiană, cu definiţii şi propoziţii concise. În încheierea cărţii, Newton adaugă şi mai apăsat: „La fel ca în matematică, în filosofia naturii cercetarea problemelor dificile prin metoda analizei trebuie să preceadă întotdeauna metoda compunerii".

Isprava lui Newton, folosind propriile sale instrumente matematice, ţine de miracol. Acest geniu care, printr-o coincidenţă istorică, s-a născut exact în anul în care a murit Galilei, a formulat legile fundamentale ale mecanicii, a descifrat legile mişcării planetelor, a pus bazele teoretice ale fenomenelor luminii şi culorii, şi a întemeiat calculul diferenţial şi integral. Fie şi numai aceste realizări ar fi fost de ajuns pentru a-i asigura lui Newton un loc de frunte în galeria celor mai însemnaţi oameni de ştiinţă. Dar cercetările sale asupra gravitaţiei sunt cele care l-au aşezat pe treapta cea mai înaltă a podiumului magicienilor – cea rezervată celui mai mare om de ştiinţă din câţi au trăit vreodată. Aceste cercetări au înălţat o punte între cer şi pământ, au unit domeniile astronomiei şi fizicii, şi au aşezat întregul cosmos sub o unică umbrelă matematică. Dar cum s-au născut *Principia*?

Am început să mă gândesc la gravitaţie extinzând-o la orbita Lunii

William Stukeley (1687 – 1765), anticar şi medic, prieten cu Newton (în ciuda celor mai bine de patru

decenii care îi separau ca vârstă), a devenit în cele din urmă primul biograf al marelui om de ştiinţă. În *Memoirs of Sir Isaac Newton*'s *Life (Amintiri despre viaţa lui Isaac Newton)* găsim una dintre cele mai celebre legende din istoria ştiinţei:

Pe 15 aprilie 1726, i-am făcut o vizită lui Sir Isaac în locuinţa din casele Orbels din Kensington, am luat masa împreună şi am petrecut toată ziua singur cu el. [...] După prânz, fiind vreme frumoasă, ne-am dus în grădină şi am băut ceai la umbra unor meri, numai el şi cu mine. Între altele, mi-a spus că se găsea exact în aceeaşi situaţie ca mai înainte [în 1666, când Newton se întorsese acasă de la Cambridge din pricina ciumei], atunci când i-a venit în minte ideea de gravitaţie. Ea a fost prilejuită de căderea unui măr pe când el stătea şi cugeta. De ce trebuie mărul să cadă întotdeauna perpendicular pe sol, s-a întrebat el. De ce nu se duce în lateral sau în sus, ci mereu spre centrul pământului? Motivul trebuie să fie, fără îndoială, acela că-l atrage pământul. Trebuie să existe o putere de atracţie în materie, iar suma puterilor de atracţie din materia pământului trebuie să fie în centrul pământului, nu în vreo parte a lui. De aceea cade mărul perpendicular, sau spre centru. Dacă materia atrage astfel materia, atracţia trebuie să fie proporţională cu cantitatea [de materie]. Prin urmare, mărul atrage pământul, la fel cum pământul atrage mărul. Atunci există o putere, ca aceea pe care o numim aici gravitaţie, care se întinde pretutindeni în univers [...] Astfel s-au născut acele uimitoare descoperiri pe care a clădit o filosofie solid întemeiată, spre uimirea întregii Europe.

Indiferent dacă miticul eveniment cu mărul a avut sau nu loc în 1666, legenda subapreciază geniul lui Newton şi profunzimea sa unică de analiză. Dacă nu încape îndoială că primul manuscris al lui Newton despre teoria gravitaţiei datează dinainte de 1669, el nu avea nevoie să vadă acţiunea fizică a căderii mărului pentru a şti că Pământul atrage obiectele din apropierea suprafeţei sale. Nici incredibila sa intuiţie în formularea legii

universale a gravitaţiei nu putea depinde doar de contemplarea căderii unui măr. De fapt, există indicii că unele noţiuni esenţiale de care Newton avea nevoie pentru a enunţa legea atracţiei universale nu au fost concepute decât prin 1684 – 1685. O idee de asemenea anvergură este atât de rară în analele ştiinţei, încât chiar şi o minte fenomenală – ca a lui Newton – a trebuit să ajungă la ea printr-un lung şir de paşi deductivi.

Poate că totul a început în tinereţea lui Newton, când s-a întâlnit cu *Elementele,* masivul tratat de geometrie al lui Euclid. Potrivit mărturiei lui Newton, întâi a „citit numai titlurile propoziţiilor" pentru că le-a găsit atât de uşor de înţeles, încât s-a „mirat cum de şi-a pierdut cineva vremea să scrie o demonstraţie a lor". Prima propoziţie care l-a făcut să se oprească şi să reflecteze a fost cea care spune că „într-un triunghi dreptunghic, pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor celor două catete" – teorema lui Pitagora. Surprinzător, poate, deşi Newton a citit câteva cărţi de matematică pe când se afla la Cambridge, la Trinity College, n-a citit prea multe dintre lucrările disponibile la acea vreme. Evident, nu avea nevoie!

Cartea care i-a influenţat pesemne cel mai mult gândirea matematică şi ştiinţifică a fost *Geometria* lui Descartes. Newton a citit-o în 1664 şi a recitit-o de mai multe ori, până când „treptat a ajuns s-o stăpânească în întregime". Flexibilitatea permisă de ideea de funcţie şi de variabile libere pare să fi deschis o infinitate de posibilităţi pentru Newton. Nu numai că geometria analitică i-a deschis drumul către inventarea calculului infinitezimal, cu studiul funcţiilor, tangentelor şi curburilor, dar i-a şi înflăcărat spiritul ştiinţific. Se terminase cu acele construcţii greoaie cu rigla şi compasul – ele erau acum înlocuite de curbe arbitrare ce puteau fi reprezentate prin expresii algebrice. Apoi, în 1665 – 1666, o teribilă ciumă loveşte Londra. Când tributul plătit săptămânal morţii atinge mii de oameni, colegiile din Cambridge sunt silite să-şi închidă porţile. Newton e nevoit să părăsească şcoala şi să se întoarcă acasă în îndepărtatul sat Woolsthorpe.

Acolo, în liniştea de la ţară, Newton face prima încercare de a demonstra că forţa care menţinea Luna pe orbită în jurul Pământului şi gravitaţia Pământului (acea forţă care făcea merele să cadă) sunt, de fapt, una şi aceeaşi. Newton vorbeşte despre aceste prime eforturi într-o notă scrisă pe la 1714:

În acelaşi an [1666] am început să mă gândesc la gravitaţie extinzând-o la orbita Lunii şi, găsind cum să estimez forţa cu care [un] glob rotindu-se într-o sferă apasă pe suprafaţa sferei din regula lui Kepler care spune că perioadele de revoluţie ale planetelor sunt invers proporţionale cu puterea 3/2 a distanţelor până la centrele orbitelor lor, am dedus că forţele care menţin planetele pe orbite trebuie să fie invers proporţionale cu pătratele distanţelor faţă de centrele în jurul cărora se rotesc: apoi am comparat forţa necesară pentru a menţine Luna pe orbită cu forţa gravitaţiei la suprafaţa Pământului, şi le-am găsit apropiate. Toate acestea s-au întâmplat în cei doi ani ai ciumei, 1665 şi 1666, pe când mă aflam în plin elan creator şi eram preocupat de matematică şi filosofie mai mult decât am fost vreodată de atunci încoace.

Newton se referă aici la importanta sa deducţie (din legile lui Kepler privind mişcarea planetelor) conform căreia atracţia gravitaţională dintre două corpuri sferice variază invers proporţional cu distanţa dintre ele. Cu alte cuvinte, dacă distanţa dintre Pământ şi Lună s-ar tripla, forţa gravitaţională pe care ar resimţi-o Luna ar fi de nouă (trei la pătrat) ori mai mică.

Din motive nu tocmai limpezi, Newton a abandonat orice studiu serios pe tema gravitaţiei şi a mişcării planetelor până în 1679. Apoi, două scrisori din partea rivalului său Robert Hooke i-au trezit din nou interesul pentru dinamică în general şi mişcarea planetelor în particular. Rezultatele acestei curiozităţi renăscute au fost spectaculoase – folosind legile mecanicii pe care le formulase anterior, Newton demonstrează a doua lege a lui Kepler privind mişcarea planetelor. Concret, el a arătat că, în cursul mişcării planetei pe o orbită eliptică în jurul

Soarelui, dreapta care uneşte planeta cu Soarele mătură arii egale în intervale de timp egale (figura 28). A demonstrat şi că „un corp rotindu-se pe o elipsă [...] legea atracţiei către un focar al elipsei [...] este invers proporţională cu pătratul distanţei”. Acestea au fost etape importante pe calea spre *Principii.*

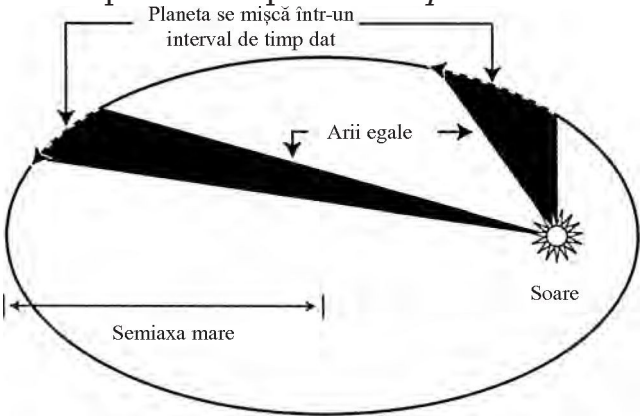


Figura 28
Principia

Halley s-a dus să-l viziteze pe Newton la Cambridge în primăvara lui 1684. De ceva vreme Halley discuta cu Hooke şi cu renumitul arhitect Cristopher Wren (1632 – 1723) legile lui Kepler privind mişcarea planetelor. În cursul acestor discuţii la cafenea, atât Hooke cât şi Wren au pretins că deduseseră legea proporţionalităţii cu inversul pătratului câţiva ani mai devreme, dar niciunul din ei n-a putut construi o teorie matematică închegată din această deducţie. Halley s-a hotărât să-i pună lui Newton întrebarea crucială: ştia ce formă are orbita unei planete asupra căreia acţionează o forţă variind după legea inversului pătratului? Spre uimirea sa, Newton i-a răspuns că demonstrase cu câţiva ani mai devreme că orbita e o elipsă. Matematicianul Abraham de Moivre (1667 – 1754) istoriseşte povestea într-o notă (din care e prezentată o pagină în figura 29):

În 1684, Dr. Halley s-a dus să-l viziteze [pe Newton] la Cambridge, iar, după un timp petrecut împreună, Dr. l-a

întrebat care crede că ar fi curba descrisă de planete, presupunând că forţa de atracţie spre soare ar fi inversul pătratului distanţei faţă de acesta. Sir Isaac i-a răspuns imediat că ar fi o ellipsis [elipsă], Doctorul bucuros şi uimit l-a întrebat de unde ştia acest lucru, iar Newton a răspuns „am calculat-o”, la care Dr. Halley i-a cerut neîntârziat calculul.

Sir Isaac a căutat printre hârtiile sale şi nu l-a putut găsi, dar a promis să-l refacă şi să i-l trimită.

Halley s-a dus într-adevăr să-l viziteze din nou pe Newton în noiembrie 1684. Între cele două vizite, Newton a muncit frenetic. De Moivre ne face o scurtă prezentare:

Sir Isaac s-a apucat de lucru din nou pentru a-şi ţine promisiunea şi nu a putut ajunge la concluzia pe care credea că o examinase atent înainte, dar a încercat o nouă cale care, deşi mai lungă decât prima, l-a adus din nou la vechea sa concluzie, apoi a cercetat cu atenţie care putea fi cauza

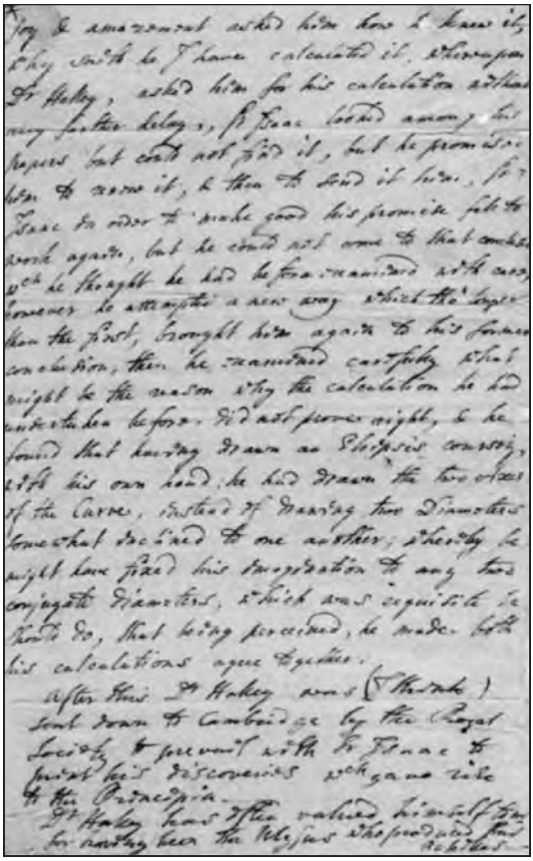


Figura 29

pentru care calculul pe care îl făcuse înainte nu se dovedise corect, şi […] a făcut ca cele două calcule să fie în acord.

Acest rezumat sec nici măcar nu începe să ne spună ce a realizat de fapt Newton în puţinele luni dintre cele două vizite ale lui Halley. A scris un întreg tratat, *De motu corporum în gyrum (Asupra mişcării corpurilor în rotaţie)*, în care demonstrează majoritatea proprietăţilor corpurilor aflate în mişcare pe orbite circulare sau eliptice, demonstrează toate legile lui Kepler şi rezolvă chiar şi mişcarea unei particule în mişcare într-un mediu rezistent (ca aerul). Halley este copleşit. Spre satisfacţia sa, reuşise măcar să-l convingă pe Newton să publice toate aceste

uimitoare descoperiri – *Principia* erau pe drum.

La început Newton privise cartea doar ca pe o versiune ceva mai extinsă şi mai detaliată a tratatului său *De motu (Asupra mişcării).* Apucându-se de lucru, şi-a dat seama că unele subiecte cereau mai multă reflecţie. Două probleme continuau să-l neliniştească pe Newton. Una era următoarea: el formulase iniţial legea atracţiei gravitaţionale ca şi cum Soarele, Pământul şi planetele ar fi mase matematice punctiforme, fără dimensiuni. Ştia, desigur, că acest lucru nu era adevărat, prin urmare îşi considera rezultatele aproximative atunci când erau aplicate sistemului solar. Unii au lansat chiar ipoteza că a abandonat din nou cercetarea subiectului gravitaţiei în 1679 din pricina nemulţumirii faţă de această situaţie. Lucrurile stăteau şi mai rău în ce privea forţa asupra mărului. În acel caz, era limpede că partea Pământului aflată direct sub măr se afla la mult mai mică distanţă decât orice altă parte de pe cealaltă faţă a Pământului. Cum putea fi calculată atracţia netă? Astronomul Herbert Hall Turner (1861 – 1930) a vorbit despre efortul intelectual al lui Newton într-un articol apărut în ziarul londonez *Times* pe 19 martie 1927:

La acea vreme avea deja ideea generală de atracţie care variază cu inversul pătratului distanţei, dar a întrevăzut serioase dificultăţi în aplicarea ei, dificultăţi de care minţi mai puţin pătrunzătoare nu erau conştiente. Nu a putut depăşi cea mai importantă dintre aceste dificultăţi până în 1685 […].

Ea era aceea de a lega atracţia pământului faţă de un corp atât de îndepărtat ca Luna de atracţia faţă de mărul din apropierea suprafeţei sale. În primul caz, diferitele particule care compun pământul (la care Newton spera să extindă în mod individual legea, pentru a o face astfel universală) se află la distanţe nu foarte diferite ca mărime şi direcţie faţă de Lună; dar distanţele lor faţă de măr diferă mult atât ca mărime, cât şi ca direcţie. Cum pot fi atracţiile separate din al doilea caz adunate sau combinate într-o singură rezultantă? Şi în care „centru de gravitaţie”,

dacă există vreunul, ar putea fi ele concentrate?

Descoperirea a fost făcută în cele din urmă în primăvara lui 1685. Newton a reuşit să demonstreze o teoremă esenţială: pentru două corpuri sferice, „întreaga forţă cu care una dintre sfere o atrage pe cealaltă este invers proporţională cu pătratul distanţei dintre centre". Corpurile sferice acţionează deci ca şi cum ar fi mase punctiforme concentrate în centrele lor. Importanţa acestei frumoase demonstraţii a fost subliniată de matematicianul James Whitbread Lee Glaisher (1848 – 1928). În discursul său, cu ocazia sărbătoririi bicentenarului *Principiilor* lui Newton (în 1887), Glaisher a spus:

De îndată ce Newton a demonstrat această superbă teoremă – şi ştim din propriile-i cuvinte că nu se aştepta la un rezultat atât de frumos până n-a reieşit din calculele sale matematice – întregul mecanism al universului i s-a înfăţişat brusc. [...] Cât de diferite trebuie să-i fi apărut aceste propoziţii lui Newton când şi-a dat seama că rezultatele, pe care le crezuse numai aproximativ adevărate atunci când erau aplicate sistemului solar, erau cu adevărat exacte! [...] Ne putem închipui efectul acestei treceri bruşte de la aproximaţie la exactitate în stimularea minţii lui Newton către eforturi şi mai mari. Stătea acum în puterea lui să aplice analiza matematică, cu precizie absolută, la problema concretă a astronomiei.

Cealaltă problemă care părea să-l tulbure încă pe Newton pe când făcea primele planuri pentru *De motu* era faptul că neglijase influenţa forţelor prin care planetele atrăgeau Soarele. Cu alte cuvinte, în formularea iniţială, redusese Soarele la un centru de forţă nemişcat de genul celor care „nu prea există" în lumea reală, după cum spunea Newton. Această schemă contrazicea a treia lege de mişcare a lui Newton, după care „acţiunile corpurilor de a atrage şi a fi atrase sunt întotdeauna reciproce şi egale". Fiecare planetă atrage Soarele exact cu aceeaşi forţă cu care Soarele atrage planeta. Prin urmare, adaugă Newton, „dacă avem două corpuri [ca Pământul şi

Soarele], nici cel care atrage, nici cel care e atras nu poate fi în repaus". Această descoperire, la prima vedere minoră, a fost de fapt o treaptă importantă către înţelegerea gravitaţiei universale. Putem încerca să ghicim raţionamentul lui Newton: dacă Soarele atrage Pământul, atunci şi Pământul trebuie să atragă Soarele, cu aceeaşi intensitate. Adică Pământul nu orbitează pur şi simplu în jurul Soarelui, ci ambii se rotesc în jurul centrului de gravitaţie comun. Dar asta nu e tot. Toate celelalte planete atrag la rândul lor Soarele, iar fiecare planetă simte nu numai atracţia Soarelui, ci şi pe cea a tuturor celorlalte planete. Aceeaşi logică se aplică lui Jupiter şi sateliţilor săi, Pământului şi Lunii, ba chiar şi mărului şi Pământului. Concluzia e uimitor de simplă – *există o unicăforţă gravitaţională care acţionează între oricare două mase, pretutindeni în univers.* De asta avea nevoie Newton. *Principiile* – 510 pagini dense în latină – au fost publicate în iulie 1687.

Newton a folosit observaţii şi experimente având o precizie de numai aproximativ 4%, din care a dedus o lege matematică a gravitaţiei care s-a dovedit a fi mai precisă de unu la un milion. El a unit pentru prima oară *explicaţii* ale fenomenelor naturale cu puterea de *predicţie* a rezultatelor observaţiilor. Fizica şi matematica s-au împletit pentru totdeauna, iar divorţul dintre ştiinţă şi filosofie a devenit inevitabil.

A doua ediţie a *Principiilor,* redactată de Newton şi de matematicianul Roger Cotes (1682 – 1716), a apărut în 1713 (figura 30 înfăţişează pagina de gardă). Newton, care n-a excelat niciodată în amabilitate, nici nu s-a sinchisit să-i mulţumească lui Cotes în prefaţa cărţii pentru imensa muncă depusă. Totuşi, atunci când Cotes s-a stins, la vârsta de 33 de ani, în urma unei febre violente, Newton i-a arătat o oarecare consideraţie: „Dacă ar fi trăit, am fi aflat câte ceva".

Unele observaţii memorabile ale lui Newton despre Dumnezeu apar abia în ediţia a doua. Într-o scrisoare către Cotes din 28 martie 1713, cu trei luni înainte de încheierea

celei de-a doua ediţii

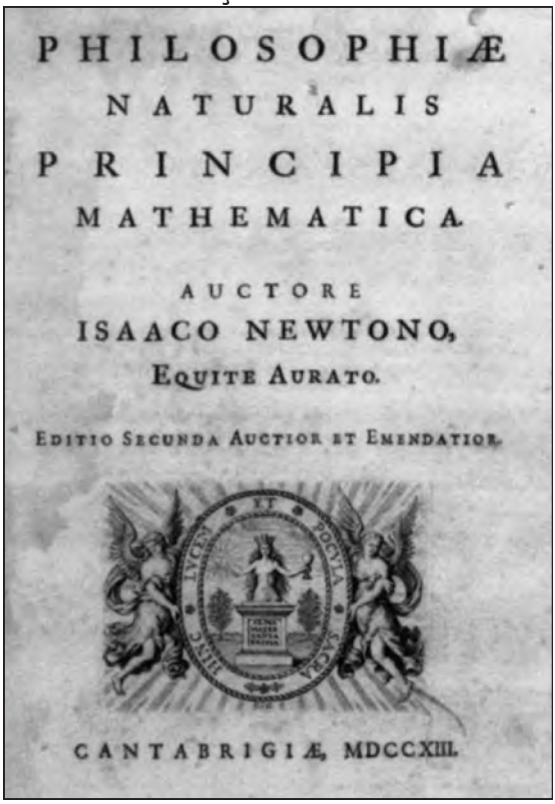

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
AUCTORE
ISAACO NEWTONO,
EQUITE AURATO.
EDITIO SECUNDA AUCTIOR ET EMENDATIOR.
CANTABRIGIÆ, MDCCXIII.

Figura 30

a *Principiilor*, Newton spune: „Este iară îndoială sarcina filosofiei naturii să vorbească despre Dumnezeu pornind de la fenomene [ale naturii]”. Într-adevăr, Newton îşi dezvăluie ideile despre un Dumnezeu „etern şi infinit, atotputernic şi atotcunoscător” în „Comentariu general” – secţiunea pe care o considera încununarea *Principiilor.*

Rămânea însă oare neschimbat rolul lui Dumnezeu în acest univers din ce în ce mai matematic? Sau Dumnezeu era perceput tot mai mult ca un matematician? La urma urmelor, până la formularea legii gravitaţiei, mişcările planetelor erau privite ca una dintre lucrările negreşit dumnezeieşti. Cum priveau Newton şi Descartes această deplasare de accent către explicarea ştiinţifică a naturii?

Dumnezeul matematician al lui Newton şi Descartes

Ca majoritatea oamenilor din vremea lor, Newton şi Descartes erau credincioşi. Voltaire (1694 – 1778), care a scris mult despre Newton, este autorul celebrei vorbe „Dacă Dumnezeu n-ar exista, ar trebui inventat".

Pentru Newton, însăşi existenţa lumii şi a regularităţii matematice a cosmosului observat era o dovadă a prezenţei lui Dumnezeu. Acest tip de raţionament cauzal, folosit pentru prima dată de teologul Toma d'Aquino (cca. 1225 – 1274), în filosofie intră în categoria argumentului *cosmologic* şi a celui *teleologic.* Simplu spus, argumentul cosmologic afirmă că, din moment ce lumea fizică a apărut cumva, trebuie să existe o Cauză Primă, anume un Dumnezeu creator. Argumentul teleologic sau *argumentul proiectului* încearcă să ofere dovada existenţei lui Dumnezeu din aparenta proiectare a lumii. Iată gândurile lui Newton, exprimate în *Principia*: „Acest atât de frumos sistem al Soarelui, planetelor şi cometelor nu poate să fi apărut decât prin sfatul şi stăpânirea unei Fiinţe inteligente atotputernice. Iar dacă stelele fixe sunt centrele altor asemenea sisteme, acestea, fiind alcătuite prin acelaşi sfat înţelept, trebuie să se afle toate sub stăpânirea acelui Unu". Validitatea argumentelor cosmologic, teleologic şi a altora asemănătoare ca dovadă a existenţei lui Dumnezeu a fost subiect de dezbatere între filosofi timp de secole. Impresia mea dintotdeauna a fost că teiştii n-au nevoie de aceste argumente ca să fie convinşi, iar ateii nu sunt convinşi de ele.

Newton a mai adăugat un argument, întemeiat pe universalitatea legilor sale. Faptul că întregul cosmos e guvernat de aceleaşi legi şi pare stabil era privit ca o dovadă în plus pentru mâna călăuzitoare a lui Dumnezeu, „mai cu seamă din moment ce lumina stelelor fixe este de *acelaşi fel* [s. m.] cu lumina Soarelui, iar din fiecare sistem lumina trece în toate celelalte sisteme; şi, ca nu cumva sistemele stelelor fixe să cadă unele peste altele din cauza gravitaţiei, a aşezat aceste sisteme la distanţe uriaşe unele faţă de altele".

În *Optica,* Newton spune limpede că nu crede că legile naturii sunt suficiente pentru a explica existenţa universului – Dumnezeu e creatorul şi susţinătorul tuturor atomilor care constituie materia cosmică: „Căci El [Dumnezeu] i-a creat [pe atomi] pentru a-i aşeza în ordine. Iar dacă a făcut astfel, e nefilozofic să cauţi orice altă Origine a Lumii sau să pretinzi că ea ar putea apărea din Haos doar prin Legile Naturii". Cu alte cuvinte, pentru Newton, Dumnezeu era (între altele) matematician, nu numai ca figură de stil, ci aproape literalmente – Dumnezeu Creatorul a făcut să apară o lume fizică guvernată de legi matematice.

Fiind mult mai aplecat spre filosofie decât Newton, Descartes fusese foarte preocupat de demonstrarea existenţei lui Dumnezeu. Pentru el, calea de la certitudinea existenţei noastre („Cuget, deci exist") la capacitatea de a construi un tablou ştiinţific obiectiv trebuia să treacă printr-o dovadă incontestabilă a existenţei unui Dumnezeu întru totul desăvârşit. Acest Dumnezeu, susţine el, e sursa ultimă a tuturor adevărurilor şi singurul garant al faptului că raţionamentul uman este corect. Acest argument suspect de circular (cunoscut sub numele de *cerc cartezian)* a fost criticat deja din vremea lui Descartes, în special de filosoful, teologul şi matematicianul francez Antoine Arnault (1612 – 1694). Arnault a pus o întrebare de o simplitate distrugătoare: dacă avem nevoie să demonstrăm existenţa lui Dumnezeu pentru a garanta validitatea procesului gândirii umane, cum putem avea încredere în demonstraţie, ea însăşi produs al minţii umane? Deşi Descartes a făcut câteva încercări disperate de a ieşi din acest cerc vicios, mulţi dintre filosofii care i-au urmat n-au găsit eforturile sale prea convingătoare. „Demonstraţia suplimentară" a existenţei lui Dumnezeu, adusă de Descartes, era şi ea discutabilă. În filosofie ea poartă numele de *argument ontologic.* Filosoful teolog Sf. Anselm de Canterbury (1033 – 1109) a formulat pentru prima dată acest tip de raţionament în 1078, iar de-atunci a reapărut sub diverse forme. Raţionamentul este, în linii

mari, următorul: prin definiţie, Dumnezeu atinge o asemenea perfecţiune, încât este cea mai desăvârşită fiinţă care se poate concepe. Dar, dacă Dumnezeu n-ar exista, atunci am putea concepe o fiinţă încă mai desăvârşită – una care, în plus faţă de faptul de a fi binecuvântată cu toate însuşirile lui Dumnezeu, mai şi există. Aceasta ar contrazice definiţia care spune că Dumnezeu este cea mai desăvârşită fiinţă care se poate concepe – prin urmare, Dumnezeu trebuie să existe. După cum spunea Descartes: „Existenţa nu poate fi separată de esenţa lui Dumnezeu, aşa cum nu putem separa de esenţa triunghiului faptul că suma unghiurilor sale este egală cu două unghiuri drepte".

Acest gen de manevră logică nu convinge prea mulţi filosofi, iar aceştia susţin că, pentru a stabili existenţa oricărui lucru din lumea fizică, în particular a ceva atât de desăvârşit ca Dumnezeu, logica singură nu este de ajuns.

Descartes a fost acuzat, în mod surprinzător, că încurajează ateismul, iar lucrările sale au fost trecute în Indexul Cărţilor Interzise de Biserica Catolică, în 1667. Acuzaţie bizară, din moment ce Descartes susţinea că Dumnezeu este garantul absolut al adevărului.

Lăsând deoparte chestiunile pur filosofice, lucrul cel mai interesant din perspectiva cărţii de faţă e credinţa lui Descartes că Dumnezeu a creat toate „adevărurile eterne". În particular, el susţine că „adevărurile matematice pe care le numim eterne au fost stabilite de Dumnezeu şi depind de El în întregime, nu mai puţin decât restul creaturilor sale". Astfel, Dumnezeul cartezian e mai mult decât un matematician, în sensul că este atât creatorul matematicii, cât şi al lumii fizice care se bazează în întregime pe matematică. Potrivit acestei perspective asupra lumii, care devenea predominantă la sfârşitul secolului XVII, oamenii doar *descoperă* matematica, nu o inventează.

Încă mai important e faptul că Galilei, Descartes şi Newton au transformat profund relaţia dintre matematică şi ştiinţă. În primul rând, evoluţia explozivă a ştiinţei a devenit o motivaţie puternica pentru cercetarea

matematică. În al doilea rând, prin legile lui Newton, domenii matematice şi mai abstracte, precum calculul infinitezimal, au devenit *esenţa* explicaţiilor fizice. În fine, şi poate cel mai important, graniţa dintre matematică şi ştiinţă a fost practic ştearsă, ajungându-se la fuziunea completă între ideile matematice şi largi zone de explorare. Toate aceste progrese au creat un entuziasm pentru matematică întâlnit doar pe vremea vechilor greci. Matematicienii au simţit că lumea trebuia cucerită şi că oferea o sursă nelimitată pentru descoperiri.

Capitolul 5

Statisticienii şi probabiliştii:
Ştiinţa incertitudinii

5 *D*

Lumea nu rămâne neclintita. Majoritatea lucrurilor care ne înconjoară sunt fie în mişcare, fie se transformă continuu. Chiar aparent fermul Pământ de sub picioare se învârte de fapt în jurul propriei axe, se roteşte în jurul Soarelui şi călătoreşte (împreună cu Soarele) în jurul centrului galaxiei Calea Lactee. Aerul pe care îl respirăm e alcătuit din mii de miliarde de molecule care se mişcă haotic neîncetat. În acelaşi timp, plantele cresc, materialele radioactive se dezintegrează, temperatura atmosferică urcă şi coboară zilnic, dar şi sezonier, iar speranţa de viaţă a oamenilor continuă să crească. Acest neastâmpăr cosmic nu a pus totuşi în încurcătură matematica. Ramura matematicii numită *calcul infinitezimal* a fost creată de Newton şi Leibniz tocmai pentru a permite o analiză riguroasă şi o modelare precisă atât a mişcării, cât şi a transformării. De-atunci încoace, acest instrument a devenit atât de puternic şi cuprinzător, încât poate fi folosit pentru a studia probleme diverse, de la deplasarea unei navete spaţiale la răspândirea unei boli infecţioase. La fel cum un film poate surprinde mişcarea fragmentând-o în secvenţe cadru-cu-cadru, calculul infinitezimal poate măsura schimbarea folosind o diviziune atât de fină, încât permite determinarea unor cantităţi care au doar o existentă efemeră, precum viteza, acceleraţia

sau rata de schimbare instantanee.

Mergând pe urmele lui Newton şi Leibniz, matematicienii Epocii Raţiunii (sfârşitul secolului XVII şi secolul XVIII) au extins calculul infinitezimal la încă mai puternica şi larg aplicabila ramură a *ecuaţiilor diferenţiale.* Înarmaţi cu acest nou instrument, oamenii de ştiinţă puteau acum prezenta teorii matematice detaliate ale unui spectru larg de fenomene, de la muzica produsă de coarda unei viori la difuzia căldurii, de la mişcarea unui titirez la curgerea lichidelor şi a gazelor. Pentru o vreme, ecuaţiile diferenţiale au devenit instrumentul progresului fizicii.

Între primii exploratori ai noilor perspective deschise de ecuaţiile diferenţiale au fost membrii legendarei familii Bernoulli. Între mijlocul secolului XVII şi mijlocul secolului XIX, această familie a dat nu mai puţin de opt matematicieni de marcă. Aceşti oameni de talent erau cunoscuţi aproape în aceeaşi măsură pentru duşmăniile din familie, ca şi pentru excepţionalele lor rezultate matematice. Dacă certurile se legau întotdeauna de disputa pentru supremaţie în matematică, unele dintre problemele care le declanşau ne par azi banale. Şi totuşi, rezolvarea acestor probleme a deschis calea către mari descoperiri matematice. În general, nu încape îndoială că familia Bernoulli a jucat un rol important în consacrarea matematicii ca limbaj ce descrie o diversitate de procese fizice.

Un exemplu pentru complexitatea intelectuală a doi dintre cei mai străluciţi Bernoulli – fraţii Jakob (1654 – 1705) şi Johann (1667 – 1748) – e dat de următoarea istorioară. Jakob Bernoulli a fost unul dintre pionierii *teoriei probabilităţilor,* şi ne vom întoarce la el în acest capitol. În 1690 însă, Jakob era ocupat cu reexaminarea unei probleme studiate cu două secole în urmă de Leonardo da Vinci, omul ce reprezintă chintesenţa Renaşterii: care e forma luată de un lanţ deformabil, dar inextensibil, suspendat în două puncte fixe (ca în figura 31)? Leonardo desenase câteva asemenea lanţuri în carnetele sale. Problema fusese de asemenea prezentată

lui Descartes de către prietenul său Isaac Beeckman, dar nu există nicio dovadă că Descartes ar fi încercat s-o rezolve. În cele din urmă, problema a devenit cunoscută ca *problema catenarei* (de la cuvântul latinesc *catena,* însemnând „lanţ”). Galilei credea că forma ar fi parabolică, dar iezuitul francez Ignatius Pardies (1636 – 1673) a demonstrat că se înşelase. Pardies nu a putut însă găsi forma corectă.

Figura 31

La numai un an după ce Jakob Bernoulli şi-a pus problema, mai tânărul său frate Johann a rezolvat-o (folosind o ecuaţie diferenţială). Leibniz şi fizicianul-matematician olandez Christiaan Huygens (1629 – 1695) au rezolvat-o la rândul lor, dar Huygens a folosit o metodă geometrică mai complicată. Faptul că Johann a reuşit să rezolve o problemă care îl blocase pe fratele şi profesorul său a continuat să-i producă satisfacţii mai tânărului Bernoulli chiar şi la treisprezece ani după moartea lui Jakob. Într-o scrisoare pe care Johann i-o scrie pe 29 septembrie 1718 matematicianului francez Pierre Rémond de Montmort (1678 – 1719), nu-şi poate ascunde încântarea:

Spui că fratele meu a propus această problemă; este adevărat, dar rezultă de aici că avea o soluţie pentru ea? Nicidecum. Atunci când a propus această problemă la sugestia mea (pentru că eu am fost primul care s-a gândit

la ea), niciunul dintre noi n-a fost în stare s-o rezolve; ne-am pierdut speranţa că ar fi rezolvabilă până când Dl. Leibniz a anunţat public în revista din Leipzig din 1690, p. 360, că rezolvase problema, dar n-a publicat soluţia, pentru a da răgaz altor analişti, iar acest lucru ne-a încurajat pe fratele meu şi pe mine să încercăm din nou.

După ce afirmă, fără ruşine, că el este autorul problemei, Johann continuă cu nedisimulată jubilaţie:

Eforturile fratelui meu a fost zadarnice; în ce mă priveşte, eu am avut mai mult noroc, căci am găsit tehnica (o spun fără să mă laud, de ce să ascund adevărul?) de a o rezolva în întregime. [...] Este adevărat că mi-a cerut un efort care mi-a răpit odihna unei nopţi întregi [...] dar în dimineaţa următoare am alergat bucuros la fratele meu, care încă se lupta cumplit cu nodul gordian fără a ajunge nicăieri, crezând mai departe, la fel ca Galilei, că este o parabolă catenara. Opreşte-te! Opreşte-te! i-am spus, nu te mai chinui în încercarea de a demonstra identitatea dintre catenară şi parabolă, fiindcă e complet falsă. [...] Apoi însă m-ai uimit trăgând concluzia că fratele meu găsise o metodă de a rezolva problema [...] Te întreb: dacă fratele meu ar fi rezolvat problema, chiar îţi închipui că ar fi fost atât de amabil cu mine încât să nu se treacă printre rezolvatori, doar pentru a-mi ceda mie gloria de a apărea singur pe scenă în calitate de prim rezolvator, alături de domnii Huygens şi Leibniz?

Dacă mai era nevoie de o dovadă că matematicienii sunt şi ei oameni, această istorioară o arată din plin. Rivalitatea familială nu scade însă cu nimic meritele celor din familia Bernoulli. În anii care au urmat episodului catenarei, Jakob, Johann şi Daniel Bernoulli (1700 – 1782) au continuat nu numai să rezolve alte probleme asemănătoare cu frânghii care atârnă, dar au şi dezvoltat teoria ecuaţiilor diferenţiale în general, şi au rezolvat problema mişcării proiectilelor într-un mediu rezistent.

Povestea catenarei demonstrează şi o altă latură a forţei matematicii – până şi problemele fizice aparent banale au soluţii matematice. În paranteză fie spus, forma

catenarei continuă să încânte milioanele de vizitatori ai faimosului Gateway Arch din St. Louis, Missouri.[17] Arhitectul american de origine finlandeză Eero Saarinen (1910 – 1961) şi inginerul american de origine germană Hannskarl Bandei (1925 – 1993) au conceput această structură emblematică în formă de catenară inversată.

Marele succes al fizicii în descoperirea legilor matematice care guvernează cosmosul a condus inevitabil la întrebarea dacă principii asemănătoare ar putea sta la baza proceselor biologice, sociale sau economice. Este matematica doar limbajul naturii, s-au întrebat matematicienii, sau este şi limbajul naturii umane? Chiar dacă nu există principii cu adevărat universale, ar putea fi folosite instrumentele matematice măcar pentru a modela şi apoi a explica comportamentul social? La început, mulţi matematicieni erau convinşi că „legi" bazate pe diverse versiuni ale calculului infinitezimal ar putea prezice cu exactitate toate evenimentele viitoare, mari sau mici. Asta credea, de pildă, marele fizician şi matematician Pierre-Simon de Laplace (1749 – 1827). Primele cinci volume ale *Mecanicii cereşti (Mécanique céleste)* a lui Laplace ofereau întâia soluţie practic completă (chiar dacă aproximativă) a mişcării în sistemul solar. În plus, Laplace a răspuns la întrebarea care îl pusese în încurcătură chiar pe Newton: de ce este sistemul solar atât de stabil? Newton credea că, datorită atracţiei reciproce, planetele ar trebui să cadă pe Soare sau să-şi ia zborul în spaţiul liber, şi invocase mâna lui Dumnezeu pentru a păstra intact sistemul solar. Laplace vedea altfel lucrurile. În loc să se bazeze pe lucrarea lui Dumnezeu, el a demonstrat matematic că sistemul solar e stabil pe perioade de timp mult mai lungi decât îşi închipuia Newton. Pentru a rezolva această problemă complicată, Laplace a creat un nou formalism matematic numit *teoria perturbaţilor,* care îi permitea să calculeze efectele cumulate a numeroase mici influenţe asupra orbitei fiecărei planete. În final,

17 Monument în formă de arcadă, închinat pionierilor care au cucerit Vestul american. *(N. t.)*

pentru a încununa totul, Laplace a propus unul dintre primele modele privind originea sistemului solar – conform *ipotezei nebulare,* sistemul solar s-a format dintr-o nebuloasă de gaz care s-a contractat.

Date fiind toate aceste impresionante realizări, nu e surprinzător că Laplace afirma plin de îndrăzneală în *încercare filosofică asupra probabilităţilor*.

Toate evenimentele, chiar şi cele care, neînsemnate fiind, nu par să urmeze marile legi ale naturii, sunt rezultatul acestora cu aceeaşi necesitate ca revoluţiile Soarelui. Necunoscând legăturile care unesc asemenea evenimente cu întreg sistemul universului, s-a crezut că ele depind de cauze finale sau de hazard. […] Trebuie atunci să considerăm că starea actuală a universului este efectul stării sale anterioare şi cauza celei care va urma. Dacă ar exista pentru o clipă o inteligenţă care să poată cuprinde toate forţele ce însufleţesc natura şi situaţiile respective ale fiinţelor care o alcătuiesc – o inteligenţă îndeajuns de vastă pentru a putea analiza toate aceste date –, ea ar îmbrăţişa în aceeaşi formulă mişcările celor mai mari corpuri din univers şi ale celor mai uşori atomi; pentru ea, nimic nu ar fi incert, iar viitorul, ca şi trecutul, ar fi prezent în ochii săi. În desăvârşirea pe care a putut-o conferi astronomiei, mintea umană oferă doar o palidă idee despre această inteligenţă.

Când vorbea despre această ipotetică „inteligenţă" supremă, Laplace nu se gândea la Dumnezeu. Spre deosebire de Newton şi Descartes, Laplace nu era credincios. Atunci când i-a înmânat lui Napoleon Bonaparte un exemplar al *Mecanicii cereşti,* acesta din urmă, care auzise că nu exista nicio referire la Dumnezeu în lucrare, a observat: „Domnule Laplace, mi s-a spus că aţi scris această carte uriaşă despre sistemul universului fără a-l pomeni vreodată pe creatorul lui". Laplace i-a răspuns pe loc: „Nu am avut nevoie să fac această ipoteză". Amuzat, Napoleon i-a relatat răspunsul matematicianului Joseph-Louis Lagrange, care a exclamat: „Ah! Iată o frumoasă ipoteză; explică multe lucruri".

Povestea însă nu se opreşte aici. Când a aflat despre reacţia lui Lagrange, Laplace a spus sec: „Această ipoteză, sire, explică într-adevăr totul, dar nu ne permite să prezicem nimic. Ca savant, eu trebuie să vă pun la dispoziţie lucrări care ne permit să facem predicţii".

Dezvoltarea mecanicii cuantice – teoria lumii subatomice – în secolul XX a dovedit că ideea de univers complet determinist fusese prea optimistă. Fizica modernă a demonstrat că e imposibil să prezicem rezultatul fiecărui experiment, chiar şi în principiu. Teoria nu poate prezice decât probabilităţi ale diferitelor rezultate. Situaţia din ştiinţele sociale este încă şi mai complexă din pricina numărului mare de elemente interconectate, dintre care multe sunt, în cel mai bun caz, incerte. Savanţii secolului XVII şi-au dat seama destul de repede că era absurd să cauţi principii sociale universale precise, asemenea legii newtoniene a gravitaţiei. Pentru o vreme, se părea că atunci când intervenea complexitatea naturii umane era imposibil de făcut predicţii sigure. Lucrurile stăteau şi mai rău atunci când erau implicate minţile unei întregi populaţii. În loc să dispere însă, câţiva gânditori ingenioşi au elaborat un nou arsenal de instrumente matematice – *statistica* şi *teoria probabilităţilor.*

Probabilităţile din spatele morţii şi impozitelor

Romancierul englez Daniel Defoe (1660 – 1731), cunoscut mai ales pentru romanul său de aventuri *Robinson Crusoe,* este şi autorul unei cărţi despre supranatural intitulată *The Political History of the Devil (Istoriapolitică a diavolului).* Acolo, Defoe, care vedea peste tot dovezi ale acţiunilor diavolului, scrie: „Poţi să ai încredere mai curând în lucruri sigure precum moartea şi impozitele". Benjamin Franklin (1706 – 1790) pare să fi fost şi el de aceeaşi părere. Într-o scrisoare pe care i-o scria, la optzeci şi trei de ani, fizicianului francez Jean-Baptiste Leroy, spunea: „Constituţia noastră funcţionează. Totul pare să promită că lucrurile vor dura; dar în lumea asta nimic nu e sigur, în afară de moarte şi de impozite". Într-adevăr, cursul vieţii noastre pare imprevizibil, supus

dezastrelor naturale şi vulnerabil în faţa greşelilor omeneşti, influenţat de pura întâmplare. Propoziţii de tipul „shit *happens*" ([…] *se întâmplă)* sunt folosite tocmai pentru a exprima vulnerabilitatea noastră faţă de neaşteptat şi incapacitatea noastră de a controla şansa. În pofida acestor obstacole, şi poate tocmai din pricina provocării, matematicienii, specialiştii în ştiinţele sociale şi biologii au încercat încă din secolul XVI să abordeze metodic incertitudinile. După întemeierea mecanicii statistice şi odată ce au înţeles că înseşi fundamentele fizicii – în forma mecanicii cuantice – se bazează pe incertitudine, fizicienii secolelor XX şi XXI li s-au alăturat. Arma pe care cercetătorii o folosesc pentru a combate absenţa determinismului riguros este capacitatea de a calcula şansele unui anume deznodământ. Neputând prezice un rezultat, cel mai bun lucru care rămâne de făcut este calculul probabilităţii diferitelor consecinţe. Instrumentele create pentru a îmbunătăţi estimările şi speculaţiile – statistica şi teoria probabilităţilor – constituie fundamentul nu numai pentru o mare parte a ştiinţei moderne, ci şi pentru o gamă largă de activităţi sociale, de la economie la sport.

Folosim cu toţii probabilităţile şi statistica pentru aproape orice hotărâre pe care o luăm, uneori subconştient. De pildă, probabil nu ştiţi că numărul de victime al accidentelor de automobil din SUA, în 2004, a fost de 42 636. Totuşi, dacă acest număr ar fi fost, să spunem, de 3 milioane, sunt sigur că aţi fi aflat. Mai mult, cunoaşterea acestui număr v-ar fi făcut să vă gândiţi de două ori înainte de a vă urca în maşină dimineaţa. De ce ne dau aceste date despre victimele şoselei o oarecare încredere în hotărârea de a conduce? După cum vom vedea curând, un ingredient-cheie al veridicităţii lor este faptul că se bazează pe numere foarte mari. Numărul de victime în Frio Town, Texas, cu o populaţie de patruzeci şi nouă de persoane în 1969, n-ar putea fi la fel de convingător. Probabilităţile şi statistica sunt printre cele mai importante săgeţi pentru arcurile economiştilor,

consilierilor politici, geneticienilor, companiilor de asigurări şi ale oricui încearcă să distileze concluzii semnificative din cantităţi imense de date. Când spunem că matematica a pătruns până şi în disciplinele neincluse iniţial între ştiinţele exacte, ne referim adesea la ferestrele deschise de teoria probabilităţilor şi statistică. Cum au apărut aceste fertile domenii?

Statistica – termen derivat din italiană: *stato* (stat) şi *statista* (persoană care se ocupă cu afaceri de stat) – s-a mărginit la început la simpla colectare a datelor de către funcţionarii guvernamentali.

Weeding» –
Blood* llue. f cowiing* and fiu* 548 Brtiicd, ud ukcii» 8
Bumt-and Seaided 1
Burii, aiid Rupture – * 9
Caoccri and Wolf – to
Canker – 1
Childbed «7.
Cknfome», and Infant «– till
Odd, and Cough * – fi
Colick, Stone, and Strangury – f 6 Cuniumption – 1797
Con rut I ion – «» 41
Cut of the Stooe – f Dead in the fireet, and (laired – Dropfte* and Swelling – 1*7
Drowned – 94
E rtoired* and ptefl to death – 11 Falling Skkneii – 7
Iftipoftume
KIPD by fereial accident v <m «*> Etil 1 1*
Lerbargie – „a lirergurim – 1 – 87
Lanatique – f
Made away themfelrca – If
Meillet – 80
Murtbered – «-7
Over-laid «a-mi (laired at nurie – 7 Pali» e – |%
Pile» – f
Plaque«8

Plane* – l!
Ple iriiic, and spleen) f Purple”, aod ip: «ci Fearer – f8
Quiniie – 7
Rjnngof the Lights – 98
Saacicu – t Seurrey. and Itch Suddenly f Male «4994*) f Male* – **4910 Whereof.
Chrhtenede Females – 4 < 90’s Bomde Female» – 48 c) % of the Lin all – 9584 J Cinai – ffifi Plagu» *8
lacveafei e ike Bwria A in the 11 «Fante «. and ar the FeAhouft ihii year ni Deocaie4 of the flag ««ta the ita Fati (hn, M-1 at the Fdit Mur chi» year.» «4
C * 7 În

Figura 32

Primul studiu serios de statistică, în sensul modern, a fost întreprins de un negustor londonez din secolul XVII. John Grăunt (1620 – 1674) se pregătise să vândă nasturi, ace şi postav. Cum slujba îi lăsa mult timp liber, Grăunt studiază, pe cont propriu, latina şi franceza, şi începe să se intereseze de anunţurile mortuare – numărul săptămânal de morţi, parohie cu parohie – publicate la Londra începând cu 1604. Publicarea acestor rapoarte avea mai ales rostul de a trage la timp un semnal de alarmă privind epidemiile devastatoare. Folosind aceste cifre brute, Grăunt a început să facă observaţii interesante pe care le-a publicat apoi într-o cărţulie de 85 de pagini, intitulată *Observaţii naturale şi politice bazate pe anunţurile mortuare.* Figura 32 înfăţişează un exemplu de tabel din broşura lui Grăunt, în care nu mai puţin de şaizeci şi trei de boli şi cauze ale morţii sunt enumerate în ordine alfabetică. În dedicaţia către preşedintele Societăţii Regale din Londra, Grăunt subliniază faptul că, din moment ce lucrarea sa priveşte „aerul, provinciile, anotimpurile, fertilitatea, sănătatea, bolile, longevitatea şi raportul dintre sex şi vârstă în rândul populaţiei”, ea este de fapt un tratat de istorie naturală. Într-adevăr, Grăunt a făcut mult mai mult decât să colecţioneze şi să prezinte datele. Studiind, de pildă, numărul mediu de botezuri şi înmormântări pentru bărbaţi şi femei la Londra şi în

parohia rurală Romsey din Hampshire, el a demonstrat pentru prima dată stabilitatea raportului dintre sexe la naştere. Mai precis, a descoperit că, la Londra, se năşteau treisprezece femei pentru paisprezece bărbaţi, iar la Romsey cincisprezece femei pentru şaisprezece bărbaţi. Grăunt a fost precaut, cerând „să se informeze călătorii dacă este la fel în alte ţări”. El a mai observat şi că „este o binecuvântare pentru omenire că, prin acest surplus de *bărbaţi,* există o barieră naturală împotriva *poligamiei*: fiindcă, într-o asemenea situaţie, femeile n-ar putea trăi la egalitate cu soţii lor, aşa cum o fac aici şi acum”. Astăzi se consideră că raportul între băieţi şi fete la naştere este de 1, 05. Explicaţia tradiţională pentru acest exces de bărbaţi este că Mama Natură favorizează naşterile de băieţi din pricina mai marii fragilităţi a fetuşurilor şi bebeluşilor de sex masculin. În paranteză fie spus, în Statele Unite şi Japonia proporţia bebeluşilor de sex masculin a scăzut puţin începând din anii 1970.

Alt efort de pionierat al lui Grăunt a fost încercarea sa de a stabili o distribuţie pe vârste, sau un „tabel al vieţii” pentru populaţia în viaţă, folosind datele privind decesele, în funcţie de cauză. Lucrul avea o mare importanţă politică, rezultând de aici numărul bărbaţilor care puteau lupta în război – între şaisprezece şi cincizeci şi şase de ani – dintr-o populaţie. Riguros vorbind, Grăunt nu avea suficiente informaţii pentru a deduce distribuţia după vârstă. Aici a demonstrat însă ingeniozitate şi creativitate. Iată cum prezintă estimarea pe care o face mortalităţii infantile:

Pornind de la aceste anunţuri generale, prima noastră observaţie privind pierderile va fi că în douăzeci de ani s-au înregistrat 229 250 de decese în urma tuturor bolilor şi accidentelor; 71 124 au murit de aftă, convulsii, rahitism, boli ale dinţilor şi viermi, precum şi în urma avorturilor sau în primele luni de viaţă, ori prin mărirea ficatului sau sufocare; ceea ce înseamnă că aproximativ 1/3 din total au murit de aceste boli, despre care presupunem că s-au abătut asupra copiilor de până la

patru sau cinci ani. Au murit şi de variolă, variolă porcină şi pojar, precum şi de viermi, fără convulsii, 12 210, din care număr presupunem, de asemenea, că 1/2 ar fi fost copii sub şase ani. Acum, considerând că 16 din cele 229 de mii au murit din cauza cumplitei năpaste care a fost ciuma, vom găsi că aproximativ treizeci şi şase la sută dintre copiii concepuţi au murit înainte să împlinească şase ani.

Cu alte cuvinte, Grăunt a estimat mortalitatea înainte de vârsta de şase ani la (71 124 + 6 105) – (229 250 – 16.000) = 0, 36. Folosind argumente similare şi estimări bazate pe informaţii, Grăunt a putut estima mortalitatea la bătrâneţe. În fine, a acoperit distanţa dintre vârsta de şase ani şi cea de şaptezeci şi şase de ani printr-o ipoteză matematică privind comportarea ratei mortalităţii în funcţie de vârstă. Chiar dacă multe dintre concluziile lui Grăunt nu erau prea întemeiate, studiul său a condus la ştiinţa statisticii aşa cum o cunoaştem azi. Observaţia sa că anumite evenimente – despre care se credea înainte că ţin doar de întâmplare sau de soartă, cum sunt decesele provocate de diferite boli – prezentau de fapt o evidentă regularitate a condus către gândirea ştiinţifică şi cantitativă în ştiinţele sociale.

Cercetătorii care i-au urmat lui Grăunt au adoptat o parte din metodologia sa, dar au şi dezvoltat statistica din punct de vedere matematic. Surprinzător poate, savantul care a adus cele mai mari îmbunătăţiri tabelului speranţei de viaţă întocmit de Grăunt a fost astronomul Edmond Halley – acela care l-a convins pe Newton să-şi publice *Principiile.* De ce era toată lumea atât de interesată de tabelele speranţei de viaţă? În parte pentru că acesta era, şi este încă, baza asigurărilor de viaţă. Companiile de asigurări (şi cei care se căsătoresc pentru bani!) îşi pun probleme de tipul: dacă un om trăieşte până la şaizeci de ani, care e probabilitatea să ajungă la optzeci de ani?

Pentru a întocmi tabelul speranţei de viaţă, Halley a folosit registre detaliate păstrate în oraşul Breslau (Wrocław) din Silezia începând cu sfârşitul secolului XVI.

Un pastor din Breslau, Caspar Neumann, folosise aceste liste pentru a înlătura din parohia sa superstiţiile potrivit cărora sănătatea e influenţată de fazele lunii sau de vârste divizibile cu şapte şi nouă. În cele din urmă, lucrarea lui Halley, purtând titlul cam lung *o estimare a gradelor de mortalitate în rândul populaţiei, extrasă din detaliatele tabele de naşteri şi înmormântări din oraşul Breslau şi însoţită de o încercare de a evalua preţul rentelor viagere,* a devenit baza matematicii asigurărilor de viaţă. Pentru a vă face o idee despre felul în care evaluează şansele companiile de asigurări, să examinăm tabelul speranţei de viaţă de mai jos, întocmit de Halley:

Tabelul arată, de pildă, că, din 710 persoane în viaţă în vârstă de şase ani, 346 erau încă în viaţă la vârsta de cincizeci de ani. Apoi, se poate lua raportul 346/710 sau 0, 49 ca estimare a probabilităţii ca o persoană în vârstă de şase ani să trăiască până la vârsta de cincizeci de ani. În mod asemănător, din 242 persoane în vârstă de şaizeci de ani, 41 mai erau în viaţă la optzeci de ani. Probabilitatea de a supravieţui de la şaizeci la optzeci de ani poate fi atunci estimată la 41/242, adică aproximativ 0, 17. Logica din spatele acestei metode e simplă. Ea se bazează pe experienţa trecută pentru a determina probabilitatea diverselor evenimente viitoare. Dacă eşantionul pe care se bazează predicţia e suficient

VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE	VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE	VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE
1	1.000	11	653	21	592
2	855	12	646	22	586
3	798	13	640	23	579
4	760	14	633	24	572

	0		4		3
5	732	15	628	25	567
6	710	16	622	26	560
7	692	17	616	27	553
8	680	18	610	28	546
9	670	19	604	29	539
10	661	20	598	30	531
VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE	VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE	VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE
31	523	41	436	51	335
32	515	42	427	52	324
33	507	43	417	53	313
34	499	44	407	54	302
35	490	45	397	55	292
36	481	46	387	56	282
37	472	47	377	57	272
38	463	48	367	58	262
39	454	49	357	59	252

40	445	50	346	60	242
VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE	VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE	VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE
61	232	71	131	81	34
62	222	72	120	82	28
63	212	73	109	83	23
64	202	74	98	84	20
65	192	75	88		
66	182	76	78		
67	172	77	68		
68	162	78	58		
69	152	79	49		
70	142	80	41		

de mare (tabelul lui Halley se baza pe o populaţie de aproximativ 34.000) şi dacă anumite ipoteze sunt valabile (de pildă aceea că mortalitatea e constantă în timp), atunci probabilităţile calculate sunt destul de fiabile. Iată cum prezintă Jakob Bernoulli această problemă:

Care muritor, mă întreb, poate stabili numărul bolilor, socotind toate cazurile posibile care afectează corpul omenesc în fiecare parte a sa şi la fiecare vârstă, şi

poate spune cu cât e mai probabil ca o boală să fie fatală decât alta [...] şi pe ce bază se poate face o predicţie asupra relaţiei dintre viaţă şi moarte la generaţiile viitoare?

După ce trage concluzia că acest lucru şi previziuni similare „depind de factori complet obscuri care ne înşală permanent simţurile prin nesfârşita complexitate a relaţiilor dintre ei", Bernoulli propune şi el o abordare statistică/probabilistică:

Există însă o altă cale care ne va conduce spre ceea ce căutăm şi ne va permite cel puţin să stabilim a posteriori ceea ce nu putem determina a priori, adică să stabilim ceva pornind de la rezultate observate în numeroase cazuri asemănătoare. Trebuie presupus că, în condiţii similare, apariţia (sau neapariţia) unui eveniment în viitor va urma acelaşi tipar observat pentru evenimente asemănătoare în trecut. De exemplu, dacă am observat că din 300 de oameni de aceeaşi vârstă şi cu aceeaşi constituţie ca un anume *Titius* 200 au murit, iar ceilalţi au supravieţuit, putem deduce cu o siguranţă rezonabilă că există de două ori mai multe şanse ca Titius să-şi dea şi el obştescul sfârşit în deceniul următor decât să supravieţuiască acestei perioade.

După articolele sale matematice despre mortalitate, Halley a scris un interesant text cu conotaţii filosofice. Iată un pasaj tulburător:

În afara utilizărilor menţionate mai sus, poate că nu e de neconceput să deducem din aceleaşi tabele că este incorect să ne plângem de scurtimea vieţii noastre şi să ne considerăm nedreptăţiţi dacă nu ajungem la bătrâneţe, când de aici rezultă că jumătate dintre născuţi mor înainte de şaptesprezece ani, din 1238 rămânând 616. Astfel, în loc să cârtim împotriva a ceea ce numim moarte prematură, trebuie să ne supunem cu calm şi nepăsare dezintegrării, care e condiţia necesară a materiei noastre perisabile şi a frumoasei şi fragilei noastre structuri şi alcătuiri: să privim ca pe o binecuvântare faptul că am supravieţuit, poate ani mulţi, acelei perioade a vieţii, în

timp ce jumătate din omenire nu reuşeşte.

Dacă situaţia în majoritatea lumii moderne s-a îmbunătăţit considerabil faţă de tristele statistici ale lui Halley, acest lucru nu e valabil, din nefericire, pentru toate ţările. În Zambia, de pildă, mortalitatea sub vârsta de cinci ani a fost estimată în 2006 la ameţitoarea cifră de 182 de morţi la 1.000 de naşteri. Speranţa de viaţă în Zambia rămâne de doar treizeci şi şapte de ani.

Statisticile nu se referă însă numai la moarte. Ele pătrund în toate aspectele vieţii, de la caracteristicile fizice la produsele intelectuale. Unul dintre primii care au recunoscut capacitatea statisticii de a oferi „legi" ştiinţelor sociale a fost belgianul Lambert Adolphe-Jacques Quetelet (1796 – 1874), un adevărat spirit universal. Lui, mai mult decât oricui, i se datorează introducerea noţiunii statistice de „om mediu", sau ceea ce numim azi „persoană medie".

Persoana medie

Adolphe Quetelet s-a născut pe 22 februarie 1796 în vechiul oraş belgian Gent. Tatăl său, funcţionar municipal, a murit pe când Adolphe avea şapte ani. Silit să se întreţină singur de tânăr, Quetelet începe să predea matematica la vârsta de şaptesprezece ani. În timpul liber compune poezii, scrie libretul unei opere, participă la compunerea a doua piese de teatru şi traduce câteva opere literare.

Matematica rămâne însă domeniul său preferat, iar Quetelet obţine diploma de doctor în ştiinţe la Universitatea din Gent. În 1820, e ales membru al Academiei Regale de Ştiinţe din Bruxelles şi, în scurt timp, devine cel mai activ participant la întrunirile Academiei. Următorii ani sunt dedicaţi mai ales învăţământului şi publicării câtorva tratate de matematică, fizică şi astronomie.

Quetelet obişnuia să-şi înceapă cursul de istoria ştiinţei cu următoarea observaţie pătrunzătoare: „Cu cât avansează ştiinţele, cu atât tind să pătrundă în domeniul matematicii, care este un fel de centru către care ele converg. Putem judeca nivelul la care a ajuns o ştiinţă

după uşurinţa, mai mare sau mai mică, cu care poate fi abordată prin calcule”.

În decembrie 1823 Quetelet e trimis la Paris pe cheltuiala statului, în principal pentru a studia tehnicile de observaţie din domeniul astronomiei. S-a întâmplat însă ca vizita de trei luni în capitala de atunci a lumii matematice să-l îndrepte pe Quetelet într-o direcţie cu totul diferită – teoria probabilităţilor. Cel care îi stârneşte lui Quetelet un interes entuziast faţă de această temă este însuşi Laplace. Quetelet avea să-şi povestească mai târziu experienţa legată de statistică şi probabilităţi:

Şansa, acest cuvânt misterios şi de care s-a abuzat, trebuie considerată doar un văl al ignoranţei noastre; este o fantomă ce exercită o dominaţie absolută asupra spiritului comun, deprins să considere evenimentele numai izolat, dar care se topeşte în faţa filosofului ce îmbrăţişează cu privirea un lung şir de evenimente, şi a cărui înţelegere nu e distrasă de variaţiuni ce dispar atunci când filosoful capătă o perspectivă suficientă pentru a sesiza legile naturii.

Importanţa acestei concluzii e imensă. Quetelet neagă în esenţă rolul şansei şi o înlocuieşte cu deducţia îndrăzneaţă (chiar dacă nedemonstrată pe de-a-ntregul) a faptului că până şi fenomenele sociale au cauze, iar regularităţile prezentate de rezultatele statistice pot fi folosite pentru a descoperi legile care stau la baza ordinii sociale.

Într-o încercare de a testa abordarea statistică, Quetelet a iniţiat un ambiţios proiect de colectare a mii de măsurători legate de corpul uman. De pildă, a studiat distribuţia măsurătorilor de circumferinţă a bustului pentru 5 738 de soldaţi scoţieni, şi de înălţime pentru 100.000 de recruţi francezi, trasând separat graficul frecvenţei cu care apărea fiecare caracteristică umană. Cu alte cuvinte, el a reprezentat grafic câţi recruţi aveau înălţimea cuprinsă, de pildă, între 165 cm şi 170 cm, şi aşa mai departe. A construit apoi grafice similare legate până şi de ceea ce numea caracteristici „morale”, pentru care

avea suficiente date. Între acestea din urmă se numărau sinucideri, căsătorii şi înclinaţia pentru crimă. Spre surprinderea sa, Quetelet a descoperit că toate caracteristicile umane urmau ceea ce se numeşte acum distribuţia *normală* (sau *gaussiană,* numită, oarecum nejustificat, după „prinţul matematicii" Carl Friederich Gauss) în formă de clopot a frecvenţelor (figura 33). Fie că era vorba de înălţime, greutate, lungime a membrelor sau chiar de însuşiri intelectuale determinate, pe atunci, cu ajutorul primelor teste psihologice, acelaşi tip de curbă apărea iar şi iar. Curba în sine nu era nouă pentru Quetelet – matematicienii şi fizicienii o cunoşteau încă de la jumătatea secolului XVIII, iar Quetelet se familiarizase cu ea în cercetările din domeniul astronomiei –, dar asocierea acestei curbe cu caracteristicile umane era surprinzătoare. Înainte, curba fusese cunoscută sub numele de *curba erorilor,* din pricina apariţiei sale în toate tipurile de erori de măsurare.

Să ne imaginăm, de pildă, că vrem să măsurăm foarte precis temperatura unui lichid dintr-un vas. Putem folosi un termometru

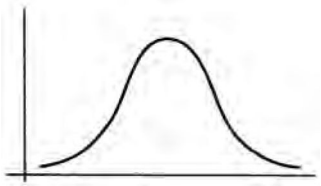


Figura 33

de mare precizie cu care să facem o mie de măsurători timp de o oră. Vom vedea că, din cauza erorilor aleatoare şi a eventualelor fluctuaţii ale temperaturii, nu toate măsurătorile dau exact aceeaşi valoare. Măsurătorile se grupează în jurul unei valori centrale, unele măsurători dând valori mai mari ale temperaturii, altele valori mai mici. Dacă reprezentăm grafic de câte ori apare o valoare în funcţie de acea valoare a temperaturii, obţinem acelaşi tip de curbă în formă de clopot pe care Quetelet l-a găsit pentru caracteristicile umane. De fapt, cu cât este mai

mare numărul de măsurători ale unei mărimi fizice, cu atât distribuţia de frecvenţe obţinută va fi mai apropiată de curba normală. Consecinţa imediată a acestui fapt în problema „imprevizibilei eficacităţi a matematicii" e spectaculoasă în sine – până şi greşelile umane ascultă de reguli matematice stricte.

Quetelet a tras de aici concluzii şi mai îndrăzneţe. El privea faptul că trăsăturile umane urmau curba erorii ca pe un indiciu că „omul mediu" era un tip pe care natura încerca să-l producă. Potrivit lui Quetelet, la fel cum erorile de fabricaţie generează o distribuţie de lungimi în jurul lungimii medii (corecte) a unui cui, erorile naturii sunt distribuite în jurul unui tip biologic preferat. El afirma că membrii unei naţiuni se grupau în jurul mediei lor „ca şi cum ar fi rezultatul unor măsurători efectuate asupra aceluiaşi individ, dar cu instrumente suficient de grosolane pentru a justifica dimensiunile variaţiilor".

Evident, speculaţiile lui Quetelet mergeau prea departe. Dacă descoperirea faptului că trăsăturile biologice (fizice sau mentale) sunt distribuite conform curbei normale de frecvenţe a fost extrem de importantă, aceasta nu putea fi considerată o dovadă a intenţiilor naturii, nici variaţiile individuale nu puteau fi tratate ca simple greşeli. Quetelet a determinat că înălţimea medie a recrutului francez era de 163 cm. La limita inferioară a găsit însă un bărbat de 43 de cm. Desigur, nimeni nu putea face o eroare de 120 de cm în măsurarea unui om de 163 de cm.

Ignorând ideea lui Quetelet de „lege" care acţionează pentru a modela oamenii după un tipar unic, faptul că o diversitate de trăsături, de la înălţime la nivelul coeficientului de inteligenţă, urmează curba normală este în sine remarcabil. Iar dacă acest lucru nu e de ajuns, chiar şi distribuţia loviturilor la baseball este, cu bună aproximaţie, normală, ca şi randamentul anual al indicilor bursieri. Într-adevăr, distribuţiile care se abat de la curba normală cer uneori o cercetare atentă. De pildă, dacă s-ar observa că distribuţia notelor la engleză într-o şcoală nu

este normală, acest lucru ar provoca o anchetă asupra procedeelor de acordare a notelor în acea şcoală. Asta nu înseamnă că toate distribuţiile sunt normale. Distribuţia lungimii cuvintelor folosite de Shakespeare în piesele sale nu este normală. El a folosit mai multe cuvinte de trei şi patru litere decât cuvinte de unsprezece şi douăsprezece litere. Venitul anual pe familie în Statele Unite este şi el reprezentat de o distribuţie diferită de cea normală. În 2006, de pildă, cele mai bogate 6, 37% dintre familii deţineau aproximativ o treime din totalul veniturilor. Acest fapt conduce la o întrebare interesantă în sine: dacă atât caracteristicile fizice, cât şi cele intelectuale (despre care se presupune că determină potenţialul pentru câştigarea veniturilor) ale oamenilor sunt normal distribuite, de ce nu este şi venitul normal distribuit? Răspunsul la asemenea întrebări socio-economice depăşeşte însă cadrul acestei cărţi. Din perspectiva noastră limitată, uimitor e faptul că toate particularităţile fizice măsurabile ale oamenilor sau ale plantelor şi animalelor (de orice specie) sunt distribuite conform unui singur tip de funcţie matematică.

Caracteristicile umane au servit nu numai ca bază de studiu pentru distribuţiile statistice de frecvenţă, dar şi pentru stabilirea conceptului matematic de *corelaţie.* Corelaţia dă măsura în care schimbările valorii unei variabile sunt însoţite de schimbări ale unei alte variabile. De pildă, ne putem aştepta ca femeile mai înalte să poarte la încălţăminte un număr mai mare. În mod asemănător, psihologii au găsit o corelaţie între inteligenţa părinţilor şi măsura în care copiii acestora reuşesc la şcoală.

Ideea de corelaţie devine foarte utilă în acele situaţii în care nu există o dependenţă funcţională precisă între cele două variabile. Să ne închipuim, de pildă, că una dintre variabile este temperatura maximă diurna din sudul Arizonei, iar cealaltă este numărul de incendii de pădure din acea regiune. Pentru o valoare dată a temperaturii, nu se poate prezice exact numărul de incendii care vor izbucni, căci el depinde şi de alte variabile, precum umiditatea şi numărul incendiilor provocate de oameni. Cu

alte cuvinte, pentru orice valoare a temperaturii, pot exista mai multe numere corespunzătoare de incendii de pădure, şi viceversa. Totuşi, noţiunea matematică numită coeficient de corelaţie ne permite să măsurăm cantitativ ponderea relaţiei dintre două astfel de variabile.

Cel care a introdus conceptul de coeficient de corelaţie a fost geograful, meteorologul, antropologul şi statisticianul din epoca victoriană Sir Francis Galton (1822 – 1911). Galton – care era de altfel văr cu Charles Darwin – nu avea studii de matematică. Fiind un om extrem de practic, lăsa de obicei punerea la punct a conceptelor sale inovatoare în seama unor matematicieni – mai ales a statisticianului Karl Pearson (1857 – 1936). Iată cum explica Galton noţiunea de corelaţie:

Lungimea antebraţului este corelată cu statura, pentru că un antebraţ lung implică de obicei o persoană înaltă. Dacă există o corelaţie strânsă între acestea două, un antebraţ foarte lung va implica de regulă o statură foarte înaltă, dar, dacă nu există o corelaţie foarte strânsă, un antebraţ foarte lung va fi, în medie, asociat doar cu o statură înaltă, nu cu una foarte înaltă; iar dacă nu există *nicio corelaţie,* un antebraţ foarte lung nu va fi asociat cu nicio statură în mod special, şi deci, în medie, va fi asociat cu o înălţime obişnuită.

Pearson a dat în cele din urmă o definiţie matematică precisă a coeficientului de corelaţie. Coeficientul se defineşte astfel încât, atunci când corelaţia e foarte puternică – adică atunci când o variabilă urmează îndeaproape tendinţa de creştere şi scădere a celeilalte –, coeficientul ia valoarea 1. Pentru două cantităţi *anticorelate* – adică, atunci când una creşte, cealaltă scade şi viceversa –, coeficientul este egal cu – 1. Două variabile care se comportă ca şi cum cealaltă nici n-ar exista au un coeficient de corelaţie nul.

(De pildă, comportarea anumitor guverne indică, din păcate, o corelaţie aproape zero cu dorinţele poporului pe care se presupune că-l reprezintă.)

Cercetarea medicală şi previziunile economice

moderne depind în mod crucial de identificarea şi calculul corelaţiilor. Legătura dintre fumat şi cancerul de plămâni sau dintre expunerea la soare şi cancerul de piele, de pildă, au fost stabilite iniţial prin descoperirea şi evaluarea corelaţiilor. Analiştii bursieri încearcă mereu să găsească şi să cuantifice corelaţiile dintre comportarea pieţei şi alte variabile; orice descoperire de acest gen poate fi extrem de profitabilă.

După cum au înţeles repede unii dintre primii statisticieni, atât colectarea datelor statistice, cât şi interpretarea lor poate fi foarte dificilă şi trebuie mânuită cu cea mai mare atenţie. Un pescar care foloseşte o plasă cu găuri de 20 de cm poate fi tentat să creadă că toţi peştii au peste 20 de cm, numai pentru că cei mai mici scapă de plasa sa. Acesta e un exemplu de efect al selecţiei – tendinţe preferenţiale în rezultate apărute fie din cauza aparatului folosit pentru colectarea datelor, fie din cauza metodologiei folosite pentru a le analiza. Eşantionarea prezintă o altă problemă. De pildă, sondajele de opinie moderne nu chestionează, de obicei, mai mult de câteva mii de persoane. Cum pot organizatorii sondajelor să fie siguri că părerile exprimate de membrii eşantionului reprezintă corect opiniile a sute de milioane de persoane? De asemenea, corelaţia nu implică în mod necesar cauzalitatea. Vânzările de noi prăjitoare de pâine pot creşte în acelaşi timp cu participarea la concertele de muzică clasică, dar asta nu înseamnă că prezenţa în casă a unui nou prăjitor de pâine face să sporească dragostea de muzică. Ambele efecte se pot datora mai curând creşterii economice.

În ciuda acestor importante precauţii, statistica a devenit unul dintre cele mai eficace instrumente din societatea modernă, introducând literalmente cuvântul „ştiinţă” în ştiinţele sociale. Dar cum se face că statistica funcţionează? Răspunsul e dat de matematica *probabilităţilor,* care domneşte peste multe aspecte ale vieţii moderne. Inginerii care încearcă să hotărască ce dispozitiv de securitate să instaleze pe o navetă spaţială,

fizicienii din domeniul fizicii particulelor elementare care analizează rezultatele unui experiment dintr-un accelerator, psihologii care clasează copiii după testele de inteligenţă, companiile farmaceutice care evaluează eficienţa noilor medicamente şi geneticienii care studiază ereditatea umană, toţi trebuie să folosească teoria matematică a probabilităţilor.

Jocuri de noroc

Studiul serios al probabilităţilor a avut începuturi modeste – încercările jucătorilor de a-şi corela pariurile cu şansele de reuşită. La jumătatea secolului XVII, un nobil francez – Cavalerul de Mere –, care era şi un reputat jucător, a adresat o serie de întrebări legate de jocurile de noroc faimosului matematician şi filosof francez Blaise Pascal (1623 – 1662). Acesta din urmă a purtat în 1654 o amplă corespondenţă în legătură cu aceste probleme cu celălalt mare matematician francez al epocii, Pierre de Fermat (1601 – 1665). În esenţă, teoria probabilităţilor s-a născut din această corespondenţă.[18] Vom studia acum unul dintre exemplele analizate de Pascal într-o scrisoare datată 29 iulie 1654. Imaginaţi-vă doi nobili jucând o partidă care implică aruncarea unui singur zar. Fiecare jucător pune pe masă treizeci şi doi de pistoli de aur. Primul jucător alege numărul 1, al doilea alege numărul 5. De fiecare dată când apare numărul ales de unul dintre jucători, jucătorul primeşte un punct. Câştigă cel care ajunge primul la trei puncte. Să presupunem că după un timp numărul 1 a apărut de două ori (astfel încât jucătorul care a ales acest număr are două puncte), iar numărul 5 numai o dată (astfel că adversarul are numai un punct). Dacă, dintr-un motiv oarecare, partida e întreruptă în acel moment, cum trebuie împărţiţi între cei doi jucători cei şaizeci şi patru de pistoli puşi în joc? Pascal şi Fermat au găsit răspunsul logic din punct de vedere matematic. Dacă jucătorul care avea două puncte ar câştiga la următoarea aruncare, cei

18 Despre corespondenţa Pascal-Fermat şi naşterea teoriei probabilităţilor, vezi cartea lui Keith Devlin *Partida neterminată* (Humanitas, Bucureşti, 2010). *(N. t.)*

şaizeci şi patru de pistoli i-ar reveni. Dacă celălalt jucător ar câştiga la următoarea aruncare, fiecare jucător ar avea două puncte, iar astfel fiecare ar primi treizeci şi doi de pistoli. Prin urmare, dacă jucătorii s-ar despărţi fără să mai arunce o dată zarurile, primul jucător ar putea susţine cu dreptate: „Sunt sigur de treizeci şi doi de pistoli chiar dacă pierd la această aruncare, cât despre ceilalţi treizeci şi doi de pistoli, poate că trebuie să-mi revină mie sau poate că trebuie să-ţi revină ţie; şansele sunt egale. Să împărţim atunci în mod egal aceşti treizeci şi doi de pistoli, şi dă-mi şi cei treizeci şi doi de pistoli de care sunt sigur”. Cu alte cuvinte, primul jucător ar trebui să primească patruzeci şi opt de pistoli, iar celălalt şaisprezece pistoli. Pare greu de crezut că o disciplină matematică nouă şi profundă s-a ivit din acest tip de discuţie banală. Acesta şi este motivul pentru care eficacitatea matematicii e atât de „imprevizibilă” şi de misterioasă.

Esenţa teoriei probabilităţilor poate fi înţeleasă pornind de la următoarele fapte simple. Nimeni nu poate prezice cu certitudine ce faţă a unei monede aruncate în aer va apărea la aterizarea ei. Chiar dacă a ieşit cap de zece ori la rând, acest fapt nu îmbunătăţeşte câtuşi de puţin capacitatea noastră de a prezice rezultatul următoarei aruncări. Putem spune însă cu certitudine că, dacă aruncăm moneda de zece milioane de ori, vom obţine cap aproape în jumătate din cazuri. De fapt, la sfârşitul secolului XIX, statistician-Karl Pearson a avut răbdarea să arunce moneda de 24.000 de ori. A obţinut cap de 12 012 ori. Într-un fel, despre asta e vorba în teoria probabilităţilor. Teoria probabilităţilor ne oferă informaţii precise despre un ansamblu de rezultate ale unui număr mare de experimente; ea nu poate niciodată prezice rezultatul unui experiment anume. Dacă un experiment poate produce *n* rezultate, fiecare cu aceeaşi şansă de realizare, atunci probabilitatea fiecărui rezultat este 1/n. La aruncarea unui zar obişnuit, probabilitatea de a obţine 4 este 1/6, pentru că zarul are şase feţe, iar fiecare faţă constituie un rezultat egal probabil. Să presupunem că

zarul este aruncat de şapte ori la rând şi că de fiecare dată se obţine 4, care este atunci probabilitatea de a obţine 4 la o nouă aruncare? Teoria probabilităţilor dă un răspuns limpede: probabilitatea este tot de 1/6 – zarul nu are memorie, şi ideea că eşti „în mână" sau că următoarea aruncare trebuie să compenseze dezechilibrul anterior nu sunt decât mituri. Adevărat este că, dintr-un milion de aruncări, rezultatele s-ar stabiliza în medie, iar 4 ar apărea cam într-o şesime din cazuri.

Să studiem acum o situaţie ceva mai complexă. Să presupunem că sunt aruncate simultan trei monede. Care e probabilitatea de a obţine două pajuri şi un cap? Putem afla răspunsul enumerând pur şi simplu toate rezultatele posibile. Dacă notăm capul cu „C" şi pajura cu „P", avem opt rezultate posibile: PPP, PPC, PCP, PCC, CPP, CPC, CCP, CCC. Dintre acestea, trei sunt favorabile evenimentului „două pajuri şi un cap". Prin urmare, probabilitatea acestui eveniment este de 3/8. Sau, mai general, dacă din *n* rezultate egal probabile, în sunt favorabile evenimentului care ne interesează, atunci probabilitatea acelui eveniment este de *m/n.* De remarcat că de aici rezultă că probabilitatea ia întotdeauna o valoare între zero şi unu. Dacă evenimentul care ne interesează este de fapt imposibil, atunci în = 0 (niciun rezultat nu e favorabil), iar probabilitatea este zero. Dacă, pe de altă parte, un eveniment este absolut cert, înseamnă că toate evenimentele sunt favorabile (m = n), iar probabilitatea este atunci *n/n* = 1. Exemplul celor trei monede demonstrează încă un rezultat important al teoriei probabilităţilor – în cazul mai multor evenimente complet *independente* între ele, probabilitatea de realizare a tuturor evenimentelor este produsul probabilităţilor individuale. De pildă, probabilitatea de a obţine trei capete este de 1/8, adică produsul celor trei probabilităţi de a obţine cap pentru fiecare dintre cele trei monede: 1/2 x 1/2 x 1/2 = 1/8.

Bine, puteţi spune, dar în afara cazinourilor şi a altor activităţi legate de jocurile de noroc, la ce pot folosi aceste

noţiuni elementare de probabilitate? E greu de crezut, dar aceste aparent nesemnificative legi ale probabilităţilor se afla în centrul geneticii moderne – ştiinţa moştenirii însuşirilor biologice.

Cel care a introdus probabilităţile în genetică a fost un călugăr morav. Gregor Mendel (1822 – 1884) s-a născut într-un sat lângă graniţa dintre Moravia şi Silezia (astăzi Hyncice în Republica Cehă). După intrarea în mănăstirea augustiniană Sf. Toma din Bino, studiază zoologia, botanica, fizica şi chimia la Universitatea din Viena. Întors la Bino, începe o perioadă activă de experienţe cu mazăre, primind sprijin din partea stareţului mănăstirii. Mendel îşi concentrează cercetările asupra mazării pentru că este o plantă uşor de cultivat şi pentru că posedă atât organe de reproducere masculine, cât şi feminine. În consecinţă, mazărea se poate autopoleniza sau încrucişa cu altă plantă. Prin polenizarea încrucişată a plantelor care produc numai seminţe verzi cu plante care produc numai seminţe galbene, Mendel obţine rezultate care par foarte încurcate la prima vedere (figura 34). Prima generaţie de vlăstare avea numai seminţe galbene, dar următoarea generaţie avea mereu un raport de 3: 1 între seminţele galbene şi cele verzi! Din aceste descoperiri surprinzătoare Mendel a tras trei concluzii care au devenit piatra de temelie a geneticii:

1. Moştenirea unei caracteristici implică transmiterea anumitor „factori” (numiţi astăzi *gene)* de la părinţi la urmaşi.
2. Fiecare urmaş moşteneşte un asemenea „factor” de la fiecare părinte (pentru orice trăsătură dată).
3. O caracteristică dată poate să nu se manifeste la un urmaş, dar poate fi transmisă mai departe la următoarea generaţie.

Dar cum pot fi explicate rezultatele cantitative din experienţa lui Mendel? Mendel susţinea că fiecare dintre plantele-părinţi trebuie să fi avut doi „factori” identici (ceea ce numimalele, varietăţi ale unei gene), fie două galbene, fie două verzi (ca în figura 35). Atunci când cei

doi părinţi s-au împerecheat, fiecare vlăstar a moştenit douăalele diferite, câte una de la fiecare părinte (potrivit celei de-a doua reguli de mai sus). Adică fiecare sămânţă-urmaş conţinea o alelă galbenă şi o alelă verde. Atunci de ce toată mazărea din această generaţie era galbenă? Pentru că, a explicat Mendel, galbenul era culoarea dominantă care masca prezenţa alelei verzi în această generaţie (a treia regulă de mai sus). Totuşi (de asemenea potrivit celei de-a treia reguli), galbenul dominant n-a împiedicat gena recesivă verde să fie transmisă generaţiei următoare. La următoarea împerechere, fiecare plantă conţinând o alelă galbenă şi o alelă verde a fost polenizată cu o altă plantă conţinând aceeaşi combinaţie dealele. Cum vlăstarele conţineau o alelă de la fiecare părinte, seminţele următoarei generaţii puteau conţine una dintre următoarele combinaţii (figura 35): verde-verde, verde-galben, galben-verde sau galben-galben. Toate seminţele cu o alelă galbenă devin mazăre galbenă, pentru că galbenul este dominant. Prin urmare, cum toate combinaţiile dealele sunt egal probabile, proporţia de mazăre galbenă faţă de cea verde ar trebui să fie de 3: 1.

r
GV
I
GG GV GV VV

Aţi observat poate că exerciţiul lui Mendel este în esenţă identic cu aruncarea a doua monede. Atribuind capul verdelui şi pajura galbenului şi punând întrebarea ce fracţiune de mazăre va fi galbenă (dat fiind că galbenul este dominant în determinarea culorii), ne regăsim exact în situaţia în care ne întrebam care e probabilitatea de a obţine cel puţin o pajură la aruncarea a doua monede. Aceasta este clar 3/4, deoarece trei dintre rezultatele posibile (pajură-pajură, pajură-cap, cap-pajură, cap-cap) conţin pajură. De unde rezultă că raportul dintre numărul de aruncări care conţin cel puţin o pajură faţă de numărul de aruncări care nu o conţin trebuie să fie (pe termen lung) 3: 1, exact ca în experienţa lui Mendel.

Mendel a publicat articolul „Experienţe asupra hibridizării plantelor” în 1865 (şi a şi prezentat rezultatele la două întruniri ştiinţifice), dar rezultatele sale au trecut în mare măsură neobservate, până când au fost redescoperite la începutul secolului XX. Deşi există anumite îndoieli legate de precizia rezultatelor, se consideră în genere că Mendel este cel care a pus genetica modernă pe baze matematice. Urmând calea deschisă de Mendel, marele statistician britanic Ronald Aylmer Fisher (1890 – 1962) a întemeiat genetica populaţiei – o ramură a matematicii care se ocupă de modelarea distribuţiei genelor într-o populaţie şi de calculul modului în care se modifică în timp frecvenţele genelor. Geneticienii de azi pot folosi eşantionări statistice combinate cu studii de ADN pentru a prezice caracteristicile probabile ale descendenţilor nenăscuţi. Şi totuşi, cât de înrudite sunt probabilităţile şi statistica?

Fapte şi previziuni

Oamenii de ştiinţă care îşi propun să descifreze evoluţia universului încearcă de regulă să atace problema de la ambele capete. Unii pornesc de la cele mai mici neomogenităţi ale materiei cosmice din universul primordial, alţii studiază universul actual în toate detaliile lui. Primii folosesc simulări laborioase pe calculator, în tentativa de a reconstitui evoluţia în timp a universului. Ceilalţi fac o muncă de detectiv încercând să deducă trecutul universului dintr-o multitudine de fapte legate de starea lui actuală. Raportul dintre teoria probabilităţilor şi statistică e asemănător. În teoria probabilităţilor, variabilele şi starea iniţială sunt cunoscute, iar scopul este de a prezice rezultatul cel mai probabil. În statistică, rezultatul e cunoscut, dar nu şi cauzele din trecut.

Să luăm un exemplu simplu privind felul în care două câmpuri se completează reciproc şi se întâlnesc, aşa-zicând, la mijloc. Putem porni de la faptul că studiile statistice arată că măsurătorile unui spectru larg de mărimi fizice şi chiar numeroase caracteristici umane se distribuie potrivit *curbei normale de frecvenţe.* Mai exact,

curba normală nu este e curbă unică, ci o familie de curbe, toate descrise de aceeaşi funcţie generală, şi toate determinate complet de numai două mărimi matematice. Prima dintre aceste mărimi – *media* – este valoarea centrală în jurul căreia distribuţia e simetrică. Valoarea reală a mediei depinde, evident, de tipul de variabilă măsurată (de pildă, greutate, înălţime sau IQ). Chiar şi pentru aceeaşi variabilă, media poate fi diferită pentru populaţii diferite. De pildă, media înălţimii bărbaţilor din Suedia este probabil diferită de media înălţimii bărbaţilor din Perú. A doua mărime care defineşte curba normală se numeşte *abaterea standard.* Aceasta arată cât de strâns se grupează datele în jurul valorii medii. În figura 36, curba normală (a) are cea mai mare abatere standard, pentru că valorile sunt mai împrăştiate. Aici intervine însă un aspect interesant. Folosind calculul integral pentru a determina ariile suprafeţelor de sub curbă, se poate demonstra matematic că, indiferent de valoarea mediei sau a deviaţiei standard, 68, 2% dintre date se află în intervalul centrat pe medie şi având lărgimea de două abateri standard (ca în figura 37). Cu alte cuvinte, dacă media IQ-ului unei populaţii (numeroase) este de 100, iar abaterea standard este de 15, atunci 68, 2% dintre indivizii populaţiei au IQ-ul cuprins între 85 şi 115. Mai mult, pentru toate curbele normale de frecvenţă, 95, 4% din populaţie are IQ-ul între 70 şi 130, iar 99, 7% între 55 şi 145.

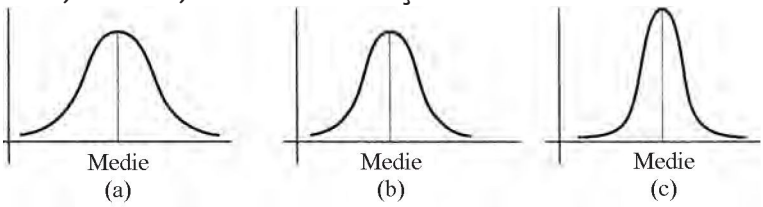


Figura 36

Să presupunem acum că vrem să prezicem probabilitatea ca o persoană aleasă la întâmplare din acea populaţie să aibă IQ-ul între 85 şi 100. Figura 37 ne spune că probabilitatea este 0, 341 (sau 34, 1%), deoarece, potrivit teoriei probabilităţilor, probabilitatea este egală cu

numărul rezultatelor favorabile împărţit la numărul total de posibilităţi. Sau ne-ar putea interesa să aflăm care e probabilitatea ca cineva (ales la întâmplare din populaţie) să aibă IQ-ul mai mare de 130. O privire aruncată asupra figurii 37 ne arată că probabilitatea este de numai 0,022, sau 2, 2%. În mod asemănător, folosind proprietăţile distribuţiei normale şi calculul integral (pentru a determina ariile suprafeţelor), se poate calcula probabilitatea ca valoarea IQ-ului să se afle în orice interval dat. Cu alte cuvinte, teoria probabilităţilor şi statistica se combină pentru a ne da răspunsul.

După cum am remarcat deja, probabilităţile şi statistica au sens doar atunci când avem de-a face cu un număr mare de evenimente – niciodată cu evenimente individuale. Această observaţie capitală, cunoscută ca *legea numerelor mari,* i se datorează lui Jakob Bernoulli, care a formulat-o ca o teoremă în cartea sa *Ars conjectândi (Arta de a emite ipoteze*; figura 38 prezintă pagina de gardă a cărţii). Simplu spus, teorema afirmă că, dacă probabilitatea de apariţie a unui eveniment este *p*, atunci *p* este cel mai probabil raport între numărul de apariţii ale evenimentului şi numărul total de încercări. În plus, atunci când numărul de încercări tinde către infinit, raportul tinde către *p*. Iată cum prezintă Bernoulli legea numerelor mari în *Ars conjectândi*: „Rămâne de cercetat dacă, sporind numărul de observaţii, creşte şi probabilitatea ca

JAC O U1 **BERNOULLI.**
Frucil Baiii. *be* ucnulquc Sucât. Keg. Socoti».
Ciali. & Pruil social
MaIHIMaílCI ClllIIMII
ARS CONJECTÂNDI.
OKI! POtTHVMUM.
Au-ki
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS, ti E r 11 *r o* i-a GaMice impea

UE I. U I) O FI. Æ
Ime ULAIU
BASILE.f.
Impenfn T ÎI URNIŞI OR
ce *111

raportul înregistrat între cazurile favorabile şi cele nefavorabile să se apropie de cel adevărat, astfel încât această probabilitate să se apropie în cele din urmă oricât de mult dorim de certitudine”. El explică apoi ideea folosind un exemplu concret:

Avem un vas care conţine 3.000 de pietricele albe şi 2000 negre, şi vrem să determinăm pe cale empirică raportul dintre pietricele albe şi cele negre – raport pe care nu-l cunoaştem – extrăgând pietricele din vas, una după alta, şi înregistrând cât de des extragem o pietricică albă şi cât de des extragem una neagră. (Vă amintesc că o cerinţă importantă a acestei metode este să punem la loc fiecare pietricică, după ce am notat culoarea şi înainte de a extrage alta, astfel încât numărul pietricelor din urnă să rămână constant.) Ne punem acum întrebarea: este posibil, continuând oricât de mult încercările, să facem de 10, 100, 1.000 etc. de ori mai probabil (şi, în cele din urmă, „moralmente cert”[19]) ca raportul dintre numărul de extrageri ale pietricelor albe şi numărul de extrageri ale pietricelor negre să ia aceeaşi valoare (3: 2) ca raportul real dintre pietricelele albe şi cele negre din vas, decât ca acesta să ia o valoare diferită? Dacă răspunsul este nu, atunci recunosc că nu vom reuşi pesemne să stabilim numărul de exemplare în fiecare caz (adică, numărul de pietricele albe şi negre) prin observaţie. Dar dacă e adevărat că în cele din urmă ajungem la certitudinea morală pe această cale [iar Jakob Bernoulli demonstrează în următorul capitol din *Ars conjectândi* că aşa stau lucrurile] […] atunci putem determina a posteriori numărul

19 Noţiunea de „certitudine morală“ îşi are originea în ideea lui Aristotel că în viaţa practică nu putem atinge acelaşi nivel de certitudine ca în matematică; la Bernoulli, are înţelesul pe care îl dăm expresiei „dincolo de orice îndoială“. *(N. t.)*

de exemplare cu aproape aceeaşi precizie cu care le cunoşteam a priori.

Bernoulli a închinat douăzeci de ani desăvârşirii acestei teoreme, care a devenit unul dintre stâlpii de rezistenţă ai statisticii. El încheie încredinţat de existenţa absolută a legilor care guvernează lumea, chiar şi în cazurile ce par să ţină de şansă:

Dacă toate evenimentele de-acum şi până în vecii vecilor ar fi permanent observate (iar probabilitatea ar deveni astfel certitudine), s-ar vedea că toate pe lume se întâmplă din motive precise şi în deplin acord cu legea, iar în felul acesta, chiar şi în cazul lucrurilor ce pot părea pur accidentale, suntem obligaţi să presupunem existenţa unei anumite necesităţi şi, aşa-zicând, a destinului. După ştiinţa mea, la asta s-a gândit Platon când, în doctrina ciclului universal, a spus că, după ce se vor fi scurs nenumărate secole, totul se va întoarce la starea iniţială.

Deznodământul acestei poveşti despre ştiinţa incertitudinii e foarte simplu: matematica se aplică chiar şi în cele mai puţin „ştiinţifice" domenii ale vieţii noastre – inclusiv în cele care par guvernate de pura întâmplare. Astfel, în încercarea de a explica „imprevizibila eficacitate" a matematicii, nu putem limita discuţia doar la legile fizicii, ci va trebui până la urmă să înţelegem ce anume face ca matematica să fie omniprezentă.

Incredibila putere a matematicii nu l-a ocolit nici pe celebrul dramaturg şi eseist George Bernard Shaw (1856 – 1950). Deloc faimos pentru talentele sale matematice, Shaw a scris un articol pătrunzător despre statistică şi probabilităţi, intitulat „Viciul jocului de noroc şi virtutea asigurării". În acest articol, Shaw recunoaşte că, pentru el, asigurările „se întemeiază pe fapte inexplicabile şi riscuri ce pot fi calculate doar de matematicienii de profesie". El face totuşi următoarea observaţie instructivă:

Să ne închipuim o discuţie de afaceri între un negustor obsedat de comerţul pe mare, dar înspăimântat că va naufragia sau va fi mâncat de sălbatici, şi un căpitan obsedat de mărfuri şi pasageri. Căpitanul îi zice

negustorului că bunurile vor fi în perfectă siguranţă, ca şi el, de altfel, dacă îl însoţeşte. Dar negustorul, cu gândul la tot ce-au îndurat Iona.

Sfântul Pavel, Odiseu şi Robinson Crusoe, nu îndrăzneşte să se aventureze. Dialogul lor ar suna cam aşa:

Căpitanul: Vino! Pun pariu pe cât vrei tu că, dacă navighezi cu mine, vei fi de azi într-un an teafăr şi nevătămat.

Negustorul: Dar, dacă mă prind, înseamnă că pariez contra dumitale că voi fi mort de azi într-un an.

Căpitanul: De ce nu, din moment ce vei pierde negreşit pariul?

Negustorul: Dar, dacă eu mă înec, te îneci şi dumneata; şi-atunci ce se-alege de pariul nostru?

Căpitanul: E-adevărat. Am să găsesc însă pe cineva care va rămâne la ţărm şi va ţine pariul cu soţia şi familia dumitale.

Negustorul: Atunci se schimbă lucrurile; dar cu marfa ce facem?

Căpitanul: Ooo! Putem include şi marfa în pariu. Sau facem două pariuri: unul pe viaţa dumitale, altul pe marfă. Şi una, şi alta vor rămâne tefere, te asigur. Nu se va întâmpla nimic; iar dumneata vei vedea toate minunăţiile de peste mări şi ţări.

Negustorul: Dar, dacă eu şi bunurile mele ajungem cu bine la liman, va trebui să-ţi plătesc preţul vieţii mele şi al bunurilor în afacerea asta. Dacă nu mă înec, sunt ruinat.

Căpitanul: Şi asta e adevărat. Numai că eu nu stau chiar aşa de bine cum îţi închipui. Dacă dumneata te îneci, atunci eu mă înec primul, fiindcă trebuie să fiu ultimul care părăseşte corabia când se scufundă. Şi totuşi, vreau să te conving să te aventurezi. Punem pariu zece contra unu. Ce zici?

Negustorul: Ah, în cazul ăsta…

Căpitanul a descoperit asigurările la fel ca aurarul băncile.

Pentru Shaw, care s-a plâns că în şcoală n-a auzit

„niciun cuvânt despre rostul sau folosul matematicii”, această poveste plină de umor despre „istoria” matematicii asigurărilor e remarcabilă.

Lăsând la o parte textul lui Shaw, am urmărit până acum dezvoltarea unor ramuri ale matematicii mai curând din perspectiva matematicienilor de profesie. Pentru aceştia, ca şi pentru mulţi filosofi raţionalişti precum Spinoza, platonismul era de la sine înţeles. Nu încăpea nicio îndoială că adevărurile matematice existau în lumea lor şi că mintea umană putea avea acces la aceste adevăruri fără ajutorul observaţiei, doar prin intermediul raţiunii. Primele semne ale unei posibile prăpăstii între perceperea geometriei euclidiene ca un ansamblu de adevăruri universale şi alte ramuri ale matematicii au fost dezvăluite de filosoful irlandez George Berkeley, episcop de Cloyne (1685 – 1753). Într-o broşură intitulată *Analistul sau discurs adresat unui matematician incredul* (acesta fiind, se pare, Edmond Halley), Berkeley a criticat înseşi bazele calculului infinitezimal şi analizei create de Newton (în *Principia)* şi Leibniz. În particular, Berkeley a demonstrat că „fluxionii” sau ratele instantanee de schimbare, introduse de Newton, nu erau o noţiune riguros definită, ceea ce, pentru Berkeley, era de ajuns ca să pună sub semnul întrebării întregul domeniu:

Metoda fluxionilor este cheia universală cu ajutorul căreia matematicienii moderni dezleagă tainele geometriei, şi prin urmare ale naturii […]. Dar dacă această metodă e limpede sau obscură, coerentă sau contradictorie, convingătoare sau precară voi cerceta cu toată imparţialitatea şi voi supune judecăţii dumneavoastră, precum şi a tuturor cititorilor nepărtinitori.

Observaţia lui Berkeley era întemeiată, iar o teorie pe deplin coerentă a analizei a fost formulată abia pe la 1960. Dar matematica va cunoaşte o criză şi mai gravă în secolul XIX.

Capitolul 6

Geometrii: socul viitorului

r>

În celebra sa carte *şocul viitorului*, Alvin Toffler defineşte sintagma din titlu drept „tensiunea distrugătoare şi dezorientarea cărora le cad pradă indivizii când trebuie să suporte schimbări foarte mari într-un timp foarte scurt”.[20] În secolul XIX, matematicienii, oamenii de ştiinţă şi filosofii au trecut exact printr-un asemenea şoc. De fapt, credinţa milenară că matematica oferă adevăruri eterne şi imuabile a fost distrusă. Această prefacere intelectuală neaşteptată a fost provocată de apariţia unor noi tipuri de geometrie, numite acum *geometrii neeuclidiene.* Chiar dacă majoritatea nespecialiştilor poate nici n-au auzit de geometriile neeuclidiene, importanţa revoluţiei în gândire adusă de aceste noi ramuri ale matematicii a fost asemuită de unii cu cea declanşată de teoria darwinistă a evoluţiei.

Pentru a înţelege pe deplin natura acestei schimbări radicale în perspectiva asupra lumii, trebuie întâi să aruncăm o privire asupra fundalului istorico-matematic.

„Adevărul” euclidian

Până la începutul secolului XIX, dacă exista o ramură a cunoaşterii care să fie considerată culmea adevărului şi certitudinii, aceea era geometria euclidiană, geometria tradiţională pe care o învăţăm la şcoală. Prin urmare, nu e surprinzător că marele filosof evreu olandez Baruch Spinoza (1632 – 1677) şi-a intitulat îndrăzneaţa încercare de a uni ştiinţa, religia, etica şi raţiunea *Etica demonstrată după metoda geometrică.* Mai mult, în pofida distincţiei clare dintre lumea ideală platoniciană a formelor matematice şi realitatea fizică, majoritatea oamenilor de ştiinţă priveau obiectele geometriei euclidiene drept abstracţiunile distilate ale corespondenţilor lor din lumea fizică, reală. Chiar şi empirişti convinşi ca David Hume (1711 – 1776), care sublinia că fundamentele ştiinţei erau mult mai puţin sigure decât se bănuia, credeau că geometria euclidiană era solidă ca stânca Gibraltarului. În *Cercetare asupra intelectului omenesc,* Hume identifică

20 Alvin Toffler, *Şocul viitorului,* Editura Politică, Bucureşti, 1973. *(N. t.)*

două tipuri de adevăruri:

Toate obiectele raţiunii sau cercetării omeneşti pot fi împărţite în mod firesc în două categorii, şi anume: *relaţii între idei* şi *fapte.* [Din prima categorie face parte] orice afirmaţie care este certă fie în mod intuitiv, fie în mod demonstrativ. [...] Propoziţiile din această categorie pot fi descoperite prin simple operaţii ale gândirii, indiferent de faptul că ceva există sau nu în univers. Chiar dacă nu ar exista vreodată în natură un cerc sau un triunghi, adevărurile demonstrate de Euclid şi-ar păstra întotdeauna certitudinea şi evidenţa ce le este proprie. Faptele [...] nu sunt stabilite în acelaşi fel, iar evidenţa adevărului lor, oricât ar fi de mare, nu este de aceeaşi natură cu cea a obiectelor anterioare. Contrariul oricărui fapt este oricând posibil, deoarece el nu poate implica o contradicţie [...]. *Că soarele nu va răsări mâine dimineaţă* nu este o propoziţie mai puţin inteligibilă şi nu implică în mai mare măsură o contradicţie decât afirmaţia *că el va răsări.* În zadar ne-am strădui, deci, să-i demonstrăm falsitatea.[21]

Cu alte cuvinte, deşi Hume, la fel ca toţi empiriştii, susţinea că întreaga cunoaştere provine din observaţie, geometria şi „adevărurile" ei continuau să se bucure de un statut privilegiat.

Marele filosof german Immanuel Kant (1724 – 1804) nu a fost întotdeauna de acord cu Hume, dar şi el a ridicat geometria euclidiană la rang de certitudine absolută. În *Critica raţiunii pure,* Kant a încercat să inverseze oarecum relaţia dintre intelect şi lumea fizică. În loc ca senzaţiile provenind din realitatea fizică să se imprime într-un intelect altminteri complet pasiv, Kant a atribuit intelectului funcţia activă de „construire" şi „prelucrare" a universului perceput. Întorcându-şi privirea spre interior, Kant s-a întrebat nu *ce* putem şti, ci *cum* putem şti ceea ce putem şti. El a arătat că, deşi ochii noştri detectează particule de lumină, acestea nu alcătuiesc o imagine de care suntem conştienţi până când informaţia nu e

21 David Hume, *Cercetare asupra intelectului omenesc,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1987. *(N. t.)*

prelucrată şi organizată de creier. Un rol esenţial în acest proces de construcţie a fost atribuit percepţiei umane a priori, intuitivă sau sintetică, a spaţiului, care, la rândul ei, se bazează pe geometria euclidiană. Kant credea că geometria euclidiană oferă singurul mijloc valabil de prelucrare şi conceptualizare a spaţiului, iar această familiarizare intuitivă şi universală cu spaţiul se află în centrul cunoaşterii noastre privind lumea înconjurătoare. Iată cuvintele lui Kant:

Spaţiul nu este un concept empiric care să fi fost scos din experienţe externe. [...] Spaţiul este o reprezentare necesară a priori, care stă la baza tuturor intuiţiilor externe. [...] Pe această necesitate a priori se întemeiază certitudinea apodictică a tuturor principiilor geometrice şi posibilitatea construcţiilor lor a priori. Dacă, în adevăr, această reprezentare a spaţiului ar fi un concept dobândit a posteriori, care ar fi scos din experienţa externă comună, primele principii ale determinării matematice n-ar fi decât percepţii. Ele ar avea deci toată contingenţa percepţiei şi nu ar fi, prin urmare, necesar ca între două puncte să fie numai o singură linie dreaptă, ci experienţa ne-ar învăţa că e totdeauna aşa.[22]

Pe scurt, potrivit lui Kant, dacă percepem un obiect, atunci rezultă cu necesitate că obiectul este spaţial şi euclidian.

Ideile lui Hume şi Kant au adus în prim-plan cele două aspecte diferite, dar la fel de importante, asociate din perspectivă istorică geometriei euclidiene. Primul era afirmaţia că geometria euclidiană reprezenta singura descriere exactă a spaţiului fizic. Al doilea era identificarea geometriei euclidiene cu o structură deductivă solidă, precisă şi infailibilă. Luate împreună, aceste două proprietăţi presupuse asigurau matematicienilor, oamenilor de ştiinţă şi filosofilor ceea ce ei considerau a fi dovada cea mai puternică a existenţei unor adevăruri bogate în consecinţe şi indubitabile despre univers. Până

22 Immanuel Kant, *Critica raţiunii pure,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969. *(N. t.)*

în secolul XIX, aceste afirmaţii erau de la sine înţelese. Dar erau ele adevărate?

Bazele geometriei euclidiene au fost puse pe la 300 î.Hr. de matematicianul grec Euclid din Alexandria. Într-o monumentală lucrare în treisprezece volume, *Elementele,* Euclid a încercat să construiască geometria pe un fundament logic bine definit. El a început cu zece axiome, pe care le-a presupus indiscutabil adevărate, şi a căutat să demonstreze un număr mare de propoziţii pe baza acestor postulate, folosind doar deducţia logică.

Primele patru axiome euclidiene erau extrem de simple şi de concise. De pildă, prima axiomă sună astfel: „Între orice două puncte se poate trasa o linie dreaptă". A patra afirmă: „Toate unghiurile drepte sunt egale". A cincea axiomă, cunoscută drept „postulatul dreptelor paralele", are însă o formulare mai complicată şi nu e de la sine-înţeleasă: „Dacă două drepte aflate într-un plan intersectează o a treia dreaptă astfel încât suma celor două unghiuri interne de pe o parte a lor e mai mică decât două unghiuri drepte, atunci cele două drepte se vor intersecta inevitabil dacă sunt prelungite suficient în acea parte". Figura 39 ilustrează conţinutul axiomei. Deşi nimeni nu se îndoieşte de adevărul acestei afirmaţii, ei îi lipseşte frumoasa simplitate a celorlalte axiome. Toate arată că Euclid însuşi nu era pe deplin mulţumit de al cincilea postulatdemonstraţiile primelor douăzeci şi opt de propoziţii din *Elementele* nu apelează la el. Versiunea echivalentă cea mai citată

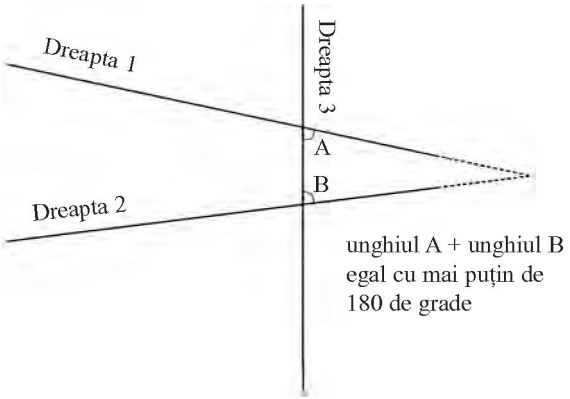


Figura 39

astăzi a postulatului a apărut prima dată în comentariile matematicianului grec Proclos din secolul V, dar e în general cunoscută ca „axioma Playfair", numită după matematicianul scoţian John Playfar (1748 – 1819). Aceasta afirmă: „Date fiind o dreaptă şi un punct exterior dreptei, e posibil să trasăm prin acel punct o dreaptă şi numai una paralelă cu dreapta dată". (vezi figura 40). Cele două versiuni ale axiomei sunt echivalente, în sensul că din axioma lui Playfair (împreună cu celelalte axiome) rezultă a cincea axiomă a lui Euclid, şi reciproc.

De-a lungul secolelor, nemulţumirea faţă de a cincea axiomă a generat multe încercări nereuşite de a o demonstra pornind de la celelalte nouă axiome sau de a o înlocui printr-un postulat evident. Când aceste tentative au eşuat, alţi geometri au încercat să răspundă la tulburătoarea întrebare „ce-ar fi dacă" – ce-ar fi dacă a cincea axiomă ar fi falsă? Unele dintre aceste tentative au pus în discuţie statutul axiomelor lui Euclid – erau într-adevăr de la sine-înţelese sau se întemeiau pe experienţă. Surprinzătorul verdict a venit în cele din urmă în secolul XIX: noi tipuri de geometrie pot fi create *alegând* o axiomă diferită de a cincea axiomă a lui Euclid. Mai mult, aceste geometrii „neeuclidiene" puteau descrie, în principiu, spaţiul fizic la fel de bine ca geometria euclidiană!

Daţi-mi voie să mă opresc aici pentru o clipă ca să

lămuresc înţelesul lui „a alege”. Timp de mii de ani, geometria euclidiană a fost considerată unică şi *inevitabilă* – singura descriere adevărată a spaţiului. Faptul că puteam alege axiomele şi obţine o descriere la fel de îndreptăţită a răsturnat totul. Schema deductivă sigură şi atent construită a devenit brusc un fel de joc în care axiomele aveau doar rolul de reguli. Axiomele puteau fi schimbate şi se obţinea un nou joc. Consecinţele acestei descoperiri asupra înţelegerii naturii matematicii au fost imense.

Câţiva matematicieni ingenioşi au pregătit terenul pentru asaltul final asupra geometriei euclidiene. Dintre ei se remarcă preotul iezuit Girolamo Saccheri (1667 – 1733), care a analizat consecinţele înlocuirii celui de-al cincilea postulat printr-o afirmaţie diferită, şi matematicienii germani Georg Klugel (1739 – 1812) şi Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777), primii care au înţeles că pot exista geometrii diferite de geometria euclidiană. Cineva trebuia să bată totuşi ultimul cui în sicriul ideii că geometria euclidiană era singura reprezentare a spaţiului. Meritul pentru aceasta s-a împărţit între trei matematicieni, unul rus, altul maghiar, iar al treilea german.

P

L

Figura 40

Stranii lumi noi

Primul care a publicat un întreg tratat despre un nou tip de geometrie – o geometrie ce putea fi construită pe o suprafaţă de forma unei şei (figura 41 a) a fost rusul Nikolai Ivanovici Lobacevski (1792 – 1856; figura 42). În acest tip de geometrie (numită acum *geometrie hiperbolică),* al cincilea postulat al lui Euclid e înlocuit cu afirmaţia că, date fiind o dreaptă aflată într-un plan şi un punct exterior dreptei, există cel puţin două drepte care trec prin acel punct şi sunt paralele cu dreapta dată. Altă diferenţă importantă între geometria lobacevskiană şi cea euclidiană este că, dacă în aceasta din urmă suma unghiurilor unui triunghi este întotdeauna de 180 de grade

(figura 41 b), în prima suma este întotdeauna mai mică de 180 de grade. Pentru că rezultatele lui Lobacevski au apărut în obscurul *Buletin al Universităţii din Kazan,* ele au trecut aproape complet neobservate până când au început să apară traduceri franceze şi germane la sfârşitul anilor 1830. Fără să cunoască rezultatele lui Lobacevski, tânărul matematician maghiar János Bolyai (1802 – 1860) a formulat o geometrie asemănătoare în anii 1820. Plin de entuziasm juvenil, el îi scrie în 1823 tatălui său (matematicianul Farkas Bolyai; figura 43): „Am găsit lucruri atât de minunate încât am încremenit. […] Din nimic, am creat o lume nouă şi diferită”. În 1825, János putea deja să-i prezinte mai vârstnicului Bolyai prima versiune a noii sale geometrii.

(a)

Figura 42

Manuscrisul se intitula *Ştiinţa absolută a spaţiului.* În ciuda exuberanţei tânărului, tatăl nu este pe de-a-ntregul convins de rigoarea ideilor lui János. Se hotărăşte totuşi să publice noua geometrie ca apendice la propriul său tratat în două volume despre bazele geometriei, algebrei şi analizei (cu titlul presupus atrăgător *Eseu asupra elementelor de matematică pentru tineretul studios).* Un

exemplar al cărţii este trimis în iunie 1831 prietenului lui Farkas, Carl Friederich Gauss (1777 – 1855; figura 44), care era nu doar cel mai mare matematician al vremii, ci şi, pesemne, alături de Arhimede şi Newton, unul dintre primii trei matematicieni din toate timpurile. Cartea s-a rătăcit în haosul creat de o epidemie de holeră, iar Farkas a trebuit să-i trimită un al doilea exemplar. Gauss i-a răspuns pe 6 martie 1832, iar comentariile sale nu au fost tocmai cele pe care le aştepta tânărul János:

Dacă voi începe prin a spune că nu pot lăuda lucrarea, vei fi desigur surprins preţ de-o clipă. Dar nu pot spune altceva.

A o lăuda, ar însemna să mă laud pe mine. Într-adevăr, întreg

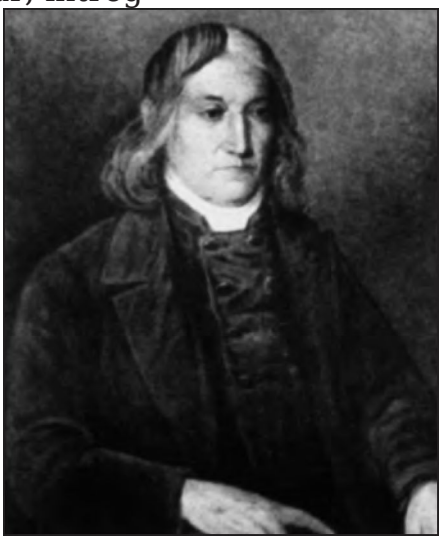


Figura 43

conţinutul lucrării, calea urmată de fiul dumitale, rezultatele la care a ajuns coincid aproape în totalitate cu gândurile care m-au muncit în ultimii treizeci sau treizeci şi cinci de ani. Aşa încât am rămas uimit. În ce priveşte propriile mele cercetări, dintre care până acum am aşternut puţine pe hârtie, intenţia mea era să nu fie publicate în timpul vieţii mele.

În paranteză fie spus, se pare că Gauss se temea că

geometria sa radical nouă avea să fie privită ca o erezie filosofică de către filosofii kantieni, pe care îi numea „beoţieni” (sinonim cu „proşti” pentru grecii antici). Gauss continuă:

Pe de altă parte, aveam intenţia de a scrie toate acestea mai târziu, ca măcar să nu piară odată cu mine. Este deci o surpriză plăcută pentru mine că sunt cruţat de acest efort, şi sunt foarte bucuros că fiul vechiului meu prieten este cel care mi-a luat-o înainte într-un mod atât de strălucit.

Figura 44

Dacă pe Farkas l-au bucurat laudele lui Gauss, pe care le-a găsit „foarte delicate”, János a fost absolut distrus. Timp de aproape un deceniu a refuzat să creadă că pretenţia de prioritate a lui Gauss nu era falsă, iar relaţia cu tatăl său (pe care îl bănuia că i-a comunicat prematur rezultatele lui Gauss) a fost foarte încordată. Când a înţeles în fine că Gauss începuse să se ocupe de problemă încă din 1799, János s-a întristat mult, iar cercetările sale matematice ulterioare (au rămas vreo douăzeci de mii de pagini de manuscris la moartea sa) au fost, prin comparaţie, lipsite de strălucire.

Nu încape îndoială că Gauss s-a gândit într-adevăr

serios la geometria neeuclidiană. Într-o însemnare de jurnal din septembrie 1799, scria: „În *principiis geometriae egregios progressus fecimus*” („Am făcut mari progrese în privinţa principiilor geometriei”). Apoi, în 1813, nota: „În teoria dreptelor paralele, nu ne aflăm acum mai departe decât Euclid. Aceasta este *la partie honteuse* [partea ruşinoasă] a matematicii, care, mai devreme sau mai târziu, va trebui să îmbrace o formă foarte diferită”. Câţiva ani mai târziu, într-o scrisoare din 28 aprilie 1817, afirma: „Sunt tot mai convins că necesitatea geometriei noastre [euclidiene] nu poate fi demonstrată”. În final, şi contrar lui Kant, Gauss trage concluzia că geometria euclidiană nu poate fi privită ca un adevăr universal: „geometria [euclidiană] nu trebuie aşezată alături de aritmetică, a cărei natură e apriorică, ci oarecum alături de mecanică”. La concluzii asemănătoare ajunsese, în mod independent, Ferdinand Schweikart (1780 – 1859), profesor de drept, care l-a informat pe Gauss despre cercetările sale cândva în 1818 sau 1819. Cum nici Gauss, nici Schweikart nu-şi publicaseră rezultatele, prioritatea le revine conform tradiţiei lui Lobacevski şi Bolyai, chiar dacă cei doi nu pot fi consideraţi singurii „creatori” ai geometriei neeuclidiene.

Geometria hiperbolică a fost ca o lovitură de trăsnet în lumea matematicii, demolând ideea că geometria euclidiană e singura descriere infailibilă a spaţiului. Înainte de cercetările lui Gauss-Lobacevski-Bolyai, geometria euclidiană *era* cu adevărat lumea înconjurătoare. Faptul că puteai alege un ansamblu diferit de axiome şi construi un tip diferit de geometrie a făcut să apară pentru prima dată bănuiala că matematica este, la urma urmelor, o invenţie omenească, iar nu descoperirea unor adevăruri care există independent de mintea umană. În acelaşi timp, surparea legăturii imediate dintre geometria euclidiană şi spaţiul fizic real a scos la iveală lucruri care păreau să fie neajunsuri grave ale ideii că matematica e limbajul universului.

Statutul privilegiat al geometriei euclidiene a avut

încă şi mai mult de suferit atunci când Bernhard Riemann, unul dintre studenţii lui Gauss, a arătat că geometria hiperbolică nu era singura geometrie neeuclidiană posibilă. Într-o strălucită conferinţă ţinută la Göttingen pe 10 iunie 1854 (figura 45 înfăţişează prima pagină a conferinţei publicate), Riemann şi-a prezentat ideile „Despre ipotezele care stau la baza geometriei”. A început prin a spune că „geometria presupune noţiunea de spaţiu, precum şi principiile elementare pentru construcţii în spaţiu. Ea dă numai definiţii convenţionale ale acestor lucruri, în timp ce precizările esenţiale apar sub forma axiomelor”. Totuşi, observă Riemann, „relaţiile dintre aceste presupoziţii rămân obscure; nu ştim dacă, sau în ce măsură, e necesară, sau a priori, o legătură între ele, şi nici măcar dacă e posibilă vreuna”. Dintre teoriile geometrice posibile, Riemann a analizat geometria eliptică, de tipul celei întâlnite pe suprafaţa unei sfere (figura 41 c). Se observă că, în această geometrie, cea mai scurtă distanţă între două puncte nu este o linie dreaptă, ci arcul unui cerc mare al cărui centru coincide cu centrul sferei. Liniile aeriene se folosesc de acest lucru – zborurile din Statele Unite în Europa nu urmează ceea ce pare a fi, pe hartă, o linie dreaptă, ci un cerc mare orientat iniţial spre nord. Este uşor de verificat că oricare două cercuri mari se intersectează în două puncte diametral opuse. De pildă, două meridiane, care la Ecuator par a fi paralele, se intersectează la cei doi poli. Prin urmare, spre deosebire de geometria euclidiană, în care există o singură dreaptă paralelă cu o alta şi care trece printr-un punct exterior dat, şi de geometria hiperbolică, în care există cel puţin două drepte paralele, în geometria eliptică de pe sferă *nu* există drepte paralele. Riemann a dus ideile neeuclidiene cu un pas înainte şi a introdus geometrii în spaţii curbe cu trei, patru şi chiar mai multe dimensiuni. Una dintre noţiunile esenţiale elaborate de Riemann a fost cea de curbură – ritmul în care se curbează o curbă sau o suprafaţă. De pildă, suprafaţa cojii unui ou se curbează mai lent la mijloc decât la capete. Riemann a dat o definiţie matematică

riguroasă curburii în spaţii cu un număr arbitrar de dimensiuni. Astfel, el a întărit legătura dintre algebră şi geometrie descoperită de Descartes. În lucrările lui Riemann, ecuaţiile cu un număr arbitrar de variabile şi-au găsit echivalente geometrice, iar noile noţiuni provenind din geometriile avansate au fost asociate cu ecuaţiile.

Nu numai dominaţia euclidiană a căzut victimă noilor orizonturi ale geometriei din secolul XIX. Ideile lui Kant despre spaţiu n-au mai supravieţuit nici ele mult timp. Kant afirmase că informaţiile primite de la simţuri sunt organizate exclusiv după tipare euclidiene înainte de fi înregistrate în mod conştient. Geometrii din secolul XIX şi-au dezvoltat repede intuiţia geometriilor neeuclidiene l mor **die Hypotheken, welche derüeometrie zu Grunde liejrcu.**

Von
B. H i r în n n B.
km 4 – Smhtas 4 «an «rU» de d rrh fi. te4 skia41
PI n n ilrr I ntfr. uchuur.

Brkuinliich teilt die Geometrie sowohl den Begriff de «Raume». «1» die ersten OniDtibqniffe filr die Coostructionen im Raume als etwa «Gegrbeurt voran «Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen während die wesentlichen Bestimmungen în Form von Axiomen auftreteu Da «Verhältnis «dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln – man ient weder ein. ob und în wie weit ihre Verbindung nothwendig. noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von Euklid bis auf Legend re. um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie su nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich ilamil beschäftigten. gehoben. K» hatte die ««einen Grund wohl dar în dass der allgemeine Begriff mehriaäh ausgedehnter Grösscu. unter welchem die Raumgrflesrn enthalten sind. gans unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher tunftchst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössen begriffen se ronstrairen

Es wird daraus henrorgehrn. dass cine mehrfach ausgedehnte Grösse vrr

I) Diese Al>hand] «nf «t am 10. Lui IM4 «m item Verfasser Mäsm Zweck seiner Habilitation rersasuheta Colloquien* mH der philosophisch-Înenkil ni Gottingtortstesra ward-Hioram «klärt sich dis Farm der Darstellng. ta welcher din analytisches roter – chaagnur snged – tot werde «koaatia einem heuoodrr-Aufsatsr erdenkt Ich demnächst id dimelblurädnokotnmen nrsunsa bweift, im iah INJ7 K-Dedekiod

Figura 45

şi au învăţat să privească lumea conform acestora. Perceperea euclidiană a spaţiului s-a dovedit a fi, la urma urmelor, învăţată, iar nu intuitivă. Toate aceste transformări spectaculoase l-au făcut pe marele matematician francez Henri Poincaré (1854 – 1912) să conchidă că axiomele geometriei „nu sunt nici intuiţii a priori, nici fapte experimentale. Ele sunt *convenţii* [s. m.]. Alegerea pe care o facem dintre toate convenţiile posibile e călăuzită de faptele experimentale, dar rămâne liberă”. Cu alte cuvinte, Poincaré privea axiomele doar ca pe nişte „definiţii deghizate”.

Perspectiva lui Poincaré a fost influenţată nu numai de geometriile neeuclidiene prezentate până acum, dar şi de proliferarea altor noi geometrii care, spre sfârşitul secolului XIX, păreau aproape scăpate de sub control. În *geometria proiectivă* (în genul celei care se obţine atunci când imaginea de pe un film de celuloid e proiectată pe un ecran), de pildă, putem efectiv schimba între ele rolul punctelor şi cel ai dreptelor, astfel încât teoremele despre puncte şi linii (în această ordine) devin teoreme despre linii şi puncte. În *geometria diferenţială,* matematicienii folosesc calculul infinitezimal pentru a studia proprietăţile geometrice globale ale diverselor spaţii matematice, de genul suprafeţei unei sfere sau a unui tor. Aceste geometrii şi altele păreau, cel puţin în primă instanţă, invenţii ingenioase ale unor minţi pline de imaginaţie matematică, iar nu descrieri exacte ale spaţiului fizic. Cum

mai poate fi atunci apărată ideea de Dumnezeu-matematician? La urma urmelor, dacă „Dumnezeu face mereu geometrie” (afirmaţie atribuită de Plutarh lui Platon), care dintre aceste numeroase geometrii e practicată de Cel de Sus?

Dezvăluirea profundelor neajunsuri ale geometriei euclidiene clasice i-a obligat pe matematicieni să-şi pună serios problema bazelor matematicii în general, şi în particular a relaţiei dintre logică şi matematică. Ne vom întoarce la acest important subiect în capitolul 7, dar deocamdată trebuie reţinut un fapt: ideea că axiomele sunt evidente prin ele însele a primit o lovitură fatală. Prin urmare, deşi secolul XIX a fost martorul unor progrese remarcabile în algebră şi analiză, revoluţia din geometrie a avut cel mai puternic impact asupra felului în care era privită natura matematicii.

Despre spaţiu, numere şi oameni

Înainte ca matematicienii să se ocupe de problema generală a bazelor matematicii, câteva probleme „mai mici” se cereau urgent rezolvate. Mai întâi, faptul că geometriile neeuclidiene fuseseră formulate şi apăruseră în publicaţii nu însemna că erau vlăstarele legitime ale matematicii. Exista mereu teama de inconsistenţă – posibilitatea ca, împingând aceste geometrii până la ultimele lor consecinţe logice, să apară contradicţii nerezolvabile. În anii 1870, italianul Eugenio Beltrami (1835 – 1900) şi germanul Felix Klein (1849 – 1925) demonstraseră că, dacă geometria euclidiană e lipsită de contradicţii, la fel sunt şi geometriile neeuclidiene. Rămânea totuşi întrebarea mai generală – cât de solide sunt bazele geometriei euclidiene? Apoi, mai era problema relevanţei. Cei mai mulţi matematicieni priveau noile geometrii în cel mai bun caz ca pe nişte bizarerii nostime. Dacă geometria euclidiană îşi întemeia forţa istorică pe faptul că era considerată descrierea spaţiului real, s-a crezut la început că geometriile neeuclidiene erau complet rupte de realitatea fizică. Prin urmare, mulţi matematicieni tratau geometriile neeuclidiene ca pe rudele sărace ale

geometriei euclidiene. Henri Poincaré era ceva mai înţelegător, dar şi el spunea că, dacă oamenii ar fi transportaţi într-o lume cu o geometrie neeuclidiană, tot „n-am găsi că ar fi convenabil să trecem" de la geometria euclidiană la cea neeuclidiană. Două întrebări stăruiau aşadar: (1) Puteau geometria (în particular) şi alte ramuri ale matematicii (în general) să fie aşezate pe o bază logic-axiomatică solidă? şi (2) Care era relaţia, dacă exista vreuna, între matematică şi lumea fizică?

Unii matematicieni au adoptat o perspectivă pragmatică în chestiunea fundamentelor geometriei. Dezamăgiţi că ceea ce consideraseră a fi adevăr absolut se întemeia de fapt pe experienţă, s-au întors la aritmetică – matematica numerelor. Geometria analitică a lui Descartes, în care punctele din plan erau identificate cu perechi ordonate de numere, cercurile cu perechi satisfăcând o anumită ecuaţie (vezi capitolul 4) etc., oferea tocmai instrumentele necesare pentru reclădirea fundamentelor geometriei pe baza numerelor. Matematicianul german Jacob Jacobi (1804 – 1851) exprima pesemne această schimbare de opinie atunci când a înlocuit cuvintele lui Platon „Dumnezeu face mereu geometrie" cu propriul său motto „Dumnezeu face mereu aritmetică". Şi totuşi, într-un fel, nu era vorba decât de transferarea problemei dintr-o ramură a matematicii într-alta. Deşi marele matematician german David Hilbert (1862 – 1943) a reuşit să demonstreze că geometria euclidiană e lipsită de contradicţii atâta vreme cât aritmetica e lipsită de contradicţii, caracterul necontradictoriu al acesteia din urmă era departe de a fi demonstrat.

O nouă idee plutea în aer în privinţa relaţiei dintre matematică şi lumea fizică. Timp de secole, rolul matematicii de a explica universul primise permanent confirmări. Matematizarea ştiinţelor înfăptuită de Galilei, Descartes, Newton, familia Bernoulli, Pascal, Lagrange, Quetelet şi alţii a fost luată drept dovadă puternică în sprijinul ideii că natura are la bază un „proiect"

matematic. Evident, ne putem pune o întrebare simplă: Dacă matematica nu e limbajul cosmosului, cum de reuşeşte să explice atât legile elementare ale naturii, cât şi trăsături specific umane?

Matematicienii îşi dădeau seama, evident, că matematica opera doar cu forme platoniciene abstracte, dar acestea erau considerate idealizări rezonabile ale elementelor fizice reale. De fapt, ideea că marea carte a naturii e scrisă în limbajul matematicii era atât de adânc înrădăcinată, încât mulţi matematicieni au refuzat categoric fie şi să ia în considerare noţiuni şi structuri matematice care nu erau direct legate de lumea fizică. Acesta era cazul, de pildă, al straniului personaj care a fost Gerolamo Cardano (1501 – 1576). Cardano era un matematician desăvârşit, un fizician de renume şi un jucător împătimit. În 1545, publică una dintre cărţile de referinţă din istoria algebrei – *Ars magna (Marea artă).* În acest tratat cuprinzător, Cardano prezintă în detaliu rezolvarea ecuaţiilor algebrice, de la ecuaţia simplă de gradul al doilea (în care necunoscuta apare la puterea a doua, x2) la cele de gradul al treilea (x3) şi al patrulea (x4). În matematica clasică însă, cantităţile erau adesea interpretate ca elemente geometrice. De pildă, valoarea necunoscutei *x* era identificată cu un segment de dreapta de acea lungime, puterea a doua *x*2 era o arie, iar puterea a treia *x*3 era un corp de volum corespunzător. Prin urmare, în primul capitol din *Ars magna,* Cardano explică:

Încheiem consideraţiile noastre amănunţite cu cubul, iar pe celelalte le vom menţiona în general, însă doar în trecere. Căci, dacă *positio* [prima putere] desemnează o dreaptă, *quadratum* [pătratul] o suprafaţă şi *cubum* [cubul] un corp solid, ar fi absurd să mergem mai departe. Natura nu îngăduie acest lucru. Se va vedea deci că toate aceste probleme sunt complet demonstrate până la cub inclusiv, dar, pentru celelalte pe care le vom adăuga, fie de nevoie, fie din curiozitate, nu trecem dincolo de prezentare.

Cu alte cuvinte, Cardano susţine că, din moment ce

lumea fizică, aşa cum e percepută de simţurile noastre, nu conţine decât trei dimensiuni, ar fi stupid pentru matematicieni să se ocupe de un număr mai mare de dimensiuni sau de ecuaţii de grad mai înalt.

O opinie asemănătoare a fost exprimată de matematicianul englez John Wallis (1616 – 1703), în a cărui *Arithmetica infinitorum* Newton a găsit metode utile pentru analiză. În *Tratatul de algebră,* o altă lucrare importantă, Wallis este primul care spune că „natura nu admite mai mult de *trei* dimensiuni (locale)”. Apoi intră în detalii:

O dreaptă care intersectează o altă dreaptă va genera un plan sau o suprafaţă; intersectarea lui cu o altă dreaptă va genera un solid. Dar, dacă solidul intersectează o dreaptă, ce se va genera? Un plano-plan? Acesta e un monstru al naturii, mai greu de închipuit decât o himeră [în mitologia greacă, un monstru tricefal care scotea flăcări, având un cap de şarpe, unul de leu şi altul de capră] sau un centaur [în mitologia greacă, o fiinţă cu bust de om şi trup şi picioare de cal]. Pentru că lungimea, lăţimea şi grosimea ocupă tot spaţiul. Nici nu ne putem imagina cum ar exista o a patra dimensiune locală dincolo de acestea trei.

Logica lui Wallis e din nou limpede: n-are rost nici măcar să ne închipuim o geometrie care nu descrie spaţiul real.

Până la urmă, opiniile au început să se schimbe. Matematicienii din secolul XVIII au fost primii care au considerat timpul ca pe o posibilă a patra dimensiune. Într-un articol intitulat „Dimensiune” şi publicat în 1754, fizicianul Jean d’Alembert (1717 – 1783) spune:

Am afirmat mai sus că sunt imposibil de conceput mai mult de trei dimensiuni. O cunoştinţă de-a mea, un om remarcabil, susţine că putem totuşi privi durata ca pe o a patra dimensiune şi că produsul dintre timp şi volum este, într-un fel, un produs în patru dimensiuni. Această idee poate fi combătută, dar mi se pare că are un anumit merit, în afara noutăţii.

Marele matematician Joseph Lagrange a mers cu un pas mai departe, afirmând în 1797:

Cum poziţia unui punct în spaţiu depinde de trei coordonate rectangulare, în problemele de mecanică aceste coordonate sunt concepute ca funcţii de t [timp]. Prin urmare, mecanica poate fi privită ca o geometrie în patru dimensiuni, iar analiza mecanică poate fi privită ca o prelungire a analizei geometrice.

Aceste idei îndrăzneţe au deschis calea unor extinderi ale matematicii de neconceput până atunci – geometrii într-un număr arbitrar de dimensiuni – care ignorau complet problema relaţiei lor cu spaţiul fizic.

Kant s-a înşelat poate crezând că simţurile care ne dau percepţia spaţială urmează exclusiv tiparele euclidiene, dar nu încape îndoială că percepţia noastră operează cel mai firesc şi mai intuitiv în maximum trei dimensiuni. Ne putem închipui destul de uşor cum ar arăta lumea noastră tridimensională în universul platonician bidimensional al umbrelor, dar a trece la un număr de dimensiuni mai mare de trei cere cu adevărat o imaginaţie de matematician.

Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877) a fost unul dintre părinţii *geometriei n-dimensionale* – geometria într-un număr arbitrar de dimensiuni. Provenind dintr-o familie cu doisprezece copii, el însuşi tată a unsprezece copii, Grassmann a fost un profesor de şcoală care n-a studiat matematica la universitate. În timpul vieţii, a fost mai cunoscut pentru lucrările sale de lingvistică (studii de sanscrită şi gotică) decât pentru cercetările sale în matematică. Unul dintre biografii săi observa: „S-ar părea că destinul lui Grassmann este de a fi redescoperit din când în când, de fiecare dată ca şi cum ar fi fost complet uitat după moartea sa”. Şi totuşi, lui i se datorează crearea unei ştiinţe abstracte a „spaţiilor”, în care geometria obişnuită nu e decât un caz particular. Grassmann şi-a publicat ideile inovatoare (întemeind o ramură a matematicii numită algebră liniară) în 1844, într-o carte cunoscută în mod curent sub titlul prescurtat

Ausdehnungslehre (ceea ce înseamnă *Teoria extensiei*; titlul complet este: *Teoria extensiei liniare: O nouă ramură a matematicii*).

În prefaţa cărţii, Grassmann scria: „Geometria nu poate fi privită [...] ca o ramură a matematicii, dar ea se leagă de ceva deja existent în natură, anume spaţiul. Am înţeles de asemenea că trebuie să existe o ramură a matematicii care să ofere pe o cale pur abstractă legi asemănătoare cu cele ale geometriei".

Aceasta era o perspectivă radical nouă asupra naturii matematicii. Pentru Grassmann, geometria tradiţională – moştenită de la grecii antici – se ocupa cu spaţiul fizic şi, prin urmare, nu putea fi considerată o veritabilă ramură a matematicii abstracte. Pentru el, matematica era mai curând o construcţie abstractă a creierului uman, care nu se aplică neapărat lumii reale.

Este fascinant de urmărit aparent banalul şir de raţionamente ale lui Grassmann care l-au condus la teoria algebrei geometrice. A început cu formula simplă $AB + BC = AC$, care apare în orice carte de geometrie în problema lungimii segmentelor de dreapta (vezi figura 46 a). Aici însă Grassmann a observat ceva interesant. El a descoperit că formula rămânea valabilă indiferent de ordinea punctelor A, *B* şi C, atâta timp cât *AB, BC* etc. nu sunt interpretate ca simple lungimi, ci li se atribuie şi o „direcţie", aşa încât $BA = -AB$. De exemplu, dacă *C* se află între *A* şi *B* (ca în figura 46 b), atunci $AB = AC + CB$, dar, cum $CB = -BC$, găsim că $AB = AC - BC$, iar formula iniţială $AB + BC = AC$ se regăseşte simplu adunând *BC* în ambii membri.

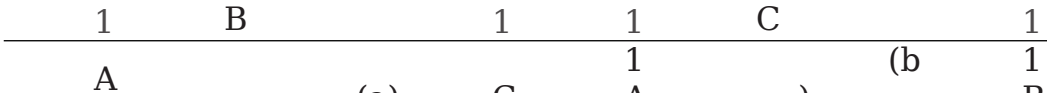


Figura 46

Lucrul era interesant în sine, dar în extensia lui Grassmann apăreau şi alte surprize. Să observăm că, dacă

am avea de-a face cu algebra în loc de geometrie, atunci o expresie ca *AB* ar desemna produsul *A x* B. În acest caz, propunerea lui Grassmann *BA* = – *AB* încalcă una dintre legile sacrosancte ale aritmeticii – aceea că produsul a două cantităţi nu depinde de ordinea în care efectuăm înmulţirea. Grassmann a luat în considerare această posibilitate tulburătoare şi a inventat o nouă algebră coerentă (numită *algebră exterioară)* care era mai permisivă în privinţa înmulţirii şi, în acelaşi timp, putea opera cu o geometrie într-un număr arbitrar de dimensiuni.

Pe la 1860, geometria «-dimensională se răspândea ca ciupercile după ploaie. Conferinţa lui Riemann făcuse din spaţiile curbe cu un număr arbitrar de dimensiuni un domeniu fundamental de cercetare, iar alţi matematicieni, precum Arthur Cayley şi James Sylvester din Anglia sau Ludwig Schläfi din Elveţia, veniseră cu propriile lor contribuţii originale. Matematicienii începeau să se simtă eliberaţi de constrângerile care legaseră matematica, timp de secole, doar de noţiunile de spaţiu şi număr. Aceste constrângeri fuseseră atât de puternice de-a lungul istoriei încât, chiar şi în secolul XVIII, prolificul matematician elveţian Leonard Euler (1707 – 1783) spusese că „matematica, în genere, e ştiinţa cantităţii sau ştiinţa care cercetează mijloacele de măsurare a cantităţii". Abia în secolul XIX a început să adie vântul schimbării.

În primul rând, apariţia spaţiilor geometrice abstracte şi a noţiunii de infinit (atât în geometrie, cât şi în teoria mulţimilor) a diluat sensul noţiunilor de „cantitate" şi de „măsurare" până la dizolvare totală. În al doilea rând, studiile de matematică abstractă care se înmulţeau rapid au făcut ca matematica să se îndepărteze şi mai mult de realitatea fizică, insuflând viaţă şi „existenţă" abstracţiunilor.

Georg Cantor (1845 – 1918), creatorul *teoriei mulţimilor*, a exprimat spiritul libertăţii dobândite de matematică prin următoarea „declaraţie de independenţă": „Matematica e absolut liberă în dezvoltarea ei, trebuind

doar să opereze cu concepte necontradictorii care să se afle în relaţii precise, ordonate prin definiţii, cu conceptele introduse anterior, care sunt deja folosite şi consacrate”. La care algebristul Richard Dedekind (1831 – 1916) a adăugat, şase ani mai târziu: „Conceptul de număr este complet independent de ideile sau intuiţiile privind spaţiul şi timpul. [...] Numerele sunt creaţii libere ale minţii umane”. Atât Cantor, cât şi Dedekind considerau matematica o cercetare abstractă, conceptuală, constrânsă doar de cerinţa coerenţei, fără niciun fel de obligaţii faţă de calcule sau limbajul realităţii fizice. După cum rezuma Cantor: *„Esenţa matematicii* constă în întregime în *libertatea* ei”.

Spre sfârşitul secolului XIX, majoritatea matematicienilor acceptaseră perspectiva lui Cantor şi Dedekind asupra libertăţii matematicii. Obiectivul matematicii nu mai era căutarea adevărurilor despre natură, ci construirea unor structuri abstracte – sistemele de axiome – şi urmărirea tuturor consecinţelor logice ale acestor axiome.

Se putea crede că în felul acesta se punea capăt dezbaterilor în jurul întrebării dacă matematica e descoperită sau inventată. Dacă matematica nu-i decât un joc, chiar şi unul complex, condus după reguli inventate arbitrar, atunci n-are niciun sens să crezi în realitatea conceptelor matematice, nu-i aşa?

Surprinzător însă, ruptura de realitatea fizică i-a condus pe unii matematicieni la perspectiva contrară. În loc să tragă concluzia că matematica e o invenţie umană, s-au întors la ideea platoniciană că matematica este o lume a adevărurilor independentă, având o existenţă la fel de reală ca aceea a universului fizic. Încercările de a lega matematica şi fizica erau tratate de aceşti „neo-platonicieni” ca un exerciţiu amatoristic de matematică *aplicată,* spre deosebire de matematica *pură,* care se presupunea a fi indiferentă faţă de tot ce ţine de lumea fizică.

Iată ce spunea matematicianul francez Charles

Hermite (18221901) într-o scrisoare către matematicianul danez Thomas Joannès Stieltjes (1856 – 1894) din 13 mai 1894: „Dragul meu prieten”, scrie el, mă bucur să văd că eşti tentat să te transformi într-un naturalist pentru a observa fenomenele lumii aritmetice. Împărtăşim acelaşi crez; sunt convins că numerele şi funcţiile din analiză nu sunt produse arbitrare ale minţii noastre; cred că ele există în afara noastră, având aceleaşi caracteristici necesare ca şi lucrurile din realitatea obiectivă, şi că le întâlnim sau le descoperim, şi le studiem, întocmai ca fizicienii, chimiştii sau zoologii.

Matematicianul englez G.H. Hardy, care a lucrat de altfel în domeniul matematicii pure, a fost unul dintre cei mai vehemenţi platonicieni moderni. Într-un discurs ţinut la Asociaţia Britanică pentru Progresul Ştiinţei, pe 7 septembrie 1922, spunea:

Matematicienii au construit un număr foarte mare de sisteme de geometrie diferite. Euclidiene şi neeuclidiene, având una, două, trei sau oricâte dimensiuni. Toate aceste sisteme sunt absolut şi egal valabile. Ele încorporează rezultatele observaţiilor matematicienilor asupra realităţii lor, una mult mai intensă şi mai stabilă decât îndoielnica şi fantomatica realitate a fizicii. […] Rolul unui matematician este deci pur şi simplu de a observa faptele din propriul său sistem al realităţii, dificil şi complicat, acel uimitor de frumos complex al relaţiilor logice care constituie obiectul ştiinţei sale, ca un explorator ce priveşte un lanţ de munţi din depărtare, şi de a consemna rezultatele observaţiilor sale într-o serie de hărţi, fiecare dintre ele fiind o ramură a matematicii pure.

Chiar dacă dovezile pledau în favoarea naturii arbitrare a matematicii, platonicienii încăpăţânaţi nu erau dispuşi să depună armele.

Dimpotrivă, ei găseau că a scotoci în ceea ce Hardy numea „realitatea lor” era mult mai tentant decât să continue să cerceteze legăturile cu realitatea fizică. Dar, independent de ideile privind realitatea metafizică a matematicii, un lucru devenise limpede. Cu toată

libertatea neîngrădită a matematicii, rămânea o constrângere neschimbată şi de nezdruncinat – aceea a coerenţei logice. Matematicienii şi filosofii îşi dădeau seama că nu puteau tăia cordonul ombilical dintre matematică şi logică. De aici a apărut o altă idee: se putea clădi întreaga matematică pe un fundament logic unic? Iar, dacă se putea, atunci care era secretul eficienţei sale? Sau, invers, puteau fi folosite metodele matematice pentru a cerceta raţionamentul în general? Dacă da, atunci matematica ar deveni nu numai limbajul naturii, ci şi limbajul gândirii umane.

Capitolul 7
Logicienii:
Reflecţie asupra raţionamentului

În anunţul din faţa unei frizerii dintr-un sat scrie: „Îi bărbieresc pe toţi bărbaţii din sat care nu se bărbieresc singuri”. Sună perfect rezonabil, nu-i aşa? Evident, bărbaţii care se bărbieresc nu au nevoie de serviciile unui frizer, şi e normal ca frizerul să-i bărbierească pe toţi ceilalţi. Dar, gândiţi-vă, cine îl bărbiereşte pe frizer? Dacă se bărbiereşte singur, atunci, potrivit anunţului, ar trebui să fie unul dintre cei care nu se bărbieresc. Pe de altă parte, dacă nu se bărbiereşte singur, atunci, iarăşi potrivit anunţului, ar trebui să fie unul dintre cei pe care îi bărbiereşte! Deci, se bărbiereşte sau nu? întrebări mult mai mărunte au condus, în istorie, la serioase certuri de familie. Acest paradox a fost propus de Bertrand Russell (1872 – 1970), unul dintre cei mai mari logicieni şi filosofi ai secolului XX, pentru a demonstra că intuiţia logicii umane e falibilă. Paradoxurile sau *antinomiile* reflectă situaţii în care premise aparent acceptabile conduc la concluzii inacceptabile. În exemplul de mai sus, frizerul satului se bărbiereşte şi în acelaşi timp nu se bărbiereşte. Poate fi rezolvat acest paradox? O rezolvare, conformă cu enunţul de mai sus, e simplă: frizerul este femeie! Dar, dacă ni se spune că frizerul e bărbat, atunci concluzia absurdă e rezultatul acceptării de la bun început a premiselor. Cu alte cuvinte, un asemenea bărbier pur şi

simplu nu poate exista. Ce au însă toate astea de-a face cu matematica? Ei bine, se dovedeşte că matematica şi logica sunt intim legate. Iată cum prezintă Russell această legătură:

Matematica şi logica au fost, istoric vorbind, discipline complet distincte. Matematica era legată de ştiinţă, logica de greci. Ambele s-au dezvoltat însă în vremurile moderne: logica a devenit mai matematică, iar matematica a devenit mai logică. Consecinţa este că acum [în 1919] e absolut imposibil să tragi o linie de demarcaţie între cele două; de fapt, ele sunt unul şi acelaşi lucru. Ele se deosebesc aşa cum se deosebeşte băiatul de bărbat: logica e tinereţea matematicii, iar matematica e maturitatea logicii.

Russell susţine aici că *matematica poate Jî redusă la logică.* Cu alte cuvinte, conceptele de bază ale matematicii, chiar şi obiecte ca numerele, pot fi definite în funcţie de legile fundamentale ale raţionamentului. Russell avea să susţină mai târziu chiar că aceste definiţii pot fi folosite împreună cu principiile logicii pentru a da naştere teoremelor din matematică.

Iniţial, această perspectivă asupra naturii matematicii (numită *logicism)* a primit atât binecuvântarea celor care considerau matematica doar o invenţie umană, un joc complicat *(formaliştii*), cât şi a platonicienilor. Primii au fost la început fericiţi să vadă un ansamblu de „jocuri" aparent fără legătură unindu-se într-o „mamă a tuturor jocurilor". Ceilalţi au văzut o rază de speranţă în ideea că întreaga matematică a crescut dintr-o singură sursă. În ochii platonicienilor, devenea astfel mai probabil să existe o unică origine metafizică. Evident, o rădăcină unică a matematicii putea ajuta, cel puţin în principiu, la găsirea originii forţelor sale.

Pentru a da o imagine completă, trebuie spus că a existat o şcoală de gândire – *intuiţionismul* – opusă atât logicismului, cât şi formalismului. Reprezentantul cel mai de seamă al acestei şcoli a fost excentricul matematician olandez Luitzen E.J. Brouwer (1881 – 1966). El credea că

numerele naturale provin dintr-o intuiţie a timpului şi a momentelor individuale din experienţa noastră. Pentru el, nu încăpea îndoială că matematica e rezultatul gândirii umane, prin urmare nu vedea deloc nevoia unor legi logice universale de tipul celor la care se gândea Russell. Brouwer a mers mult mai departe, declarând că singurele entităţi matematice care au sens sunt cele ce pot fi explicit construite pe baza numerelor naturale, folosind un număr finit de paşi. Prin urmare, a respins mari domenii ale matematicii pentru care demonstraţiile constructive nu erau posibile. Alt concept logic negat de Brouwer era *principiul terţului exclus* – după care orice afirmaţie este fie adevărată, fie falsă. A permis în schimb afirmaţiilor să lâncezească într-un purgatoriu, în care erau „nedecise". Acestea şi alte câteva constrângeri intuiţioniste au marginalizat această şcoală de gândire. Şi totuşi, ideile intuiţioniste au anticipat unele dintre descoperirile din ştiinţele cognitive legate de întrebarea dacă oamenii dobândesc într-adevăr cunoaşterea matematică (temă abordată în capitolul 9), şi i-au stimulat pe unii filosofi moderni ai matematicii (cum ar fi Michael Dummet). Perspectiva lui Dummet este esenţialmente lingvistică, afirmând că „sensul unei afirmaţii matematice determină şi este complet determinată de *folosirea* ei".

Dar cum a apărut o asemenea colaborare strânsă între matematică şi logică? Era viabil programul logicist? Vom trece pe scurt în revistă câteva momente-cheie din ultimele patru secole.

Logica şi matematica

În mod tradiţional, logica se ocupa cu relaţiile dintre concepte şi propoziţii, şi cu procesele prin care se puteau obţine deducţii corecte din aceste relaţii. De exemplu, deducţii de genul „fiecare *X* este un Y; unii *Z* sunt X; atunci unii *Z* sunt Y" sunt construite astfel încât să asigure automat adevărul concluziei, atâta timp cât premisele sunt adevărate. De pildă, „fiecare biograf este un autor; unii politicieni sunt biografi; atunci unii politicieni sunt autori" produce o concluzie adevărată. Pe de altă parte, deducţii

de forma generală „fiecare *X* este un Y; unii *Z* sunt Y; atunci unii *Z* sunt X” nu sunt corecte, deoarece se pot găsi exemple pentru care, în ciuda premiselor adevărate, concluzia e falsă. De pildă: „fiecare om este un mamifer; unele animale cu coarne sunt mamifere; atunci unele animale cu coarne sunt oameni”.

Atâta timp cât sunt respectate anumite reguli, corectitudinea unei demonstraţii nu depinde de subiectele propoziţiilor. De pildă:

Fie valetul l-a asasinat pe milionar, fie fata lui l-a ucis;

Fiica sa nu l-a ucis;

Atunci valetul l-a asasinat.

produce o deducţie corectă. Soliditatea acestei demonstraţii nu se sprijină pe părerea noastră despre relaţia dintre milionar şi fiica lui. Corectitudinea este aici asigurată de faptul că propoziţii de forma generală „dacă *p* sau q, şi nu q, atunci p „produc adevăr logic.

Aţi observat poate că în cele două exemple*X,* Vei *Z*joacă roluri foarte asemănătoare celor ale variabilelor din ecuaţiile matematice – marchează locul în care sunt introduse expresiile, la fel cum valorile numerice sunt introduse pentru variabile în algebră. În mod asemănător, adevărul din deducţia „dacă *p* sau q, şi nu q, atunci p „ne aminteşte de axiomele geometriei lui Euclid. Cu toate acestea, a trebuit să treacă aproape două milenii de meditaţii asupra logicii pentru ca matematicienii să reacţioneze la această analogie.

Primul care a încercat să combine cele două discipline, logica şi matematica, într-o singură „matematică universală” a fost matematicianul şi filosoful raţionalist german Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Leibniz, care studiase dreptul, şi-a efectuat cea mai mare parte a studiilor de matematică, fizică şi filosofie în timpul liber. Pe durata vieţii, a fost cunoscut mai cu seamă pentru că formulase independent de (şi aproape simultan cu) Newton bazele calculului infinitezimal (şi pentru disputa aprigă ce a urmat între ei asupra priorităţii). Într-o

lucrare concepută aproape în întregime la vârsta de şaisprezece ani, Leibniz preconiza un limbaj universal al raţionamentului, sau *characteristica universalis,* pe care îl considera instrumentul absolut al gândirii. Planul său era să reprezinte noţiunile şi ideile simple prin simboluri, iar pe cele mai complexe prin combinaţii ale acestor semne elementare. Leibniz spera să poată calcula efectiv adevărul oricărei afirmaţii, din orice disciplină ştiinţifică, doar prin operaţii algebrice. El a prezis că, folosind corect calculul logic, dezbaterile filosofice puteau fi tranşate. Din păcate, Leibniz n-a ajuns prea departe în elaborarea algebrei logicii. În plus faţă de principiul general al unui „alfabet al gândirii", cele două contribuţii ale sale au fost stabilirea condiţiilor în care două lucruri sunt egale şi concluzia oarecum evidentă că nicio afirmaţie nu poate fi simultan adevărată şi falsă. Prin urmare, deşi strălucite, ideile lui Leibniz au trecut aproape cu totul neobservate.

Logica a ajuns din nou la modă pe la jumătatea secolului XIX, iar redeşteptarea interesului pentru ea a adus cu sine cercetări importante: mai întâi prin Augustus de Morgan (1806 – 1871), apoi prin George Boole (1815 – 1864), Gottlob Frege (1848 – 1925) şi Giuseppe Peano (1858 – 1932).

De Morgan a fost extrem de prolific – a publicat mii de articole şi cărţi în diverse domenii: matematică, istoria matematicii, filosofie. Între lucrările sale mai puţin obişnuite se numără un almanah al lunilor pline (acoperind mii de ani) şi o culegere de curiozităţi matematice. Întrebat odată despre vârsta sa, el a răspuns: „Am avut *x* ani în anul x2". Puteţi verifica că 43 e singurul număr al cărui pătrat este cuprins între 1806 şi 1871 (anul naşterii şi, respectiv, al morţii lui de Morgan). Cele mai originale contribuţii ale lui de Morgan au fost pesemne în logică, unde a extins mult domeniul silogismelor lui Aristotel şi a reluat abordarea algebrică a raţionamentului. De Morgan privea logica cu ochi de algebrist, iar algebra cu ochi de logician. Într-unul dintre articolele sale, a prezentat această perspectivă vizionară: „În algebră întâlnim cea mai

curentă întrebuinţare a formelor logice [...] algebristul trăia deja în atmosfera rarefiată a silogismului, în permanenta compunere a relaţiilor, înainte ca existenţa acestei atmosfere să fie recunoscută".

Una dintre cele mai importante contribuţii ale lui de Morgan în logică este *cuantificarea predicatului.* Aceasta e o denumire uşor pretenţioasă pentru ceea ce poate fi considerat drept o surprinzătoare omisiune din partea logicienilor perioadei clasice. Aristotelicienii au înţeles, în mod corect, că din premise de tipul „unii *Z* sunt *X*" şi „unii *Z* sunt *Y*", nu se poate stabili cu necesitate o relaţie între *X* şi Y. De pildă, propoziţiile „unii oameni mănâncă pâine" şi „unii oameni mănâncă mere" nu permit să se tragă vreo concluzie fermă privind relaţia dintre mâncătorii de mere şi mâncătorii de pâine. Până în secolul XIX, logicienii au presupus şi că, pentru ca o relaţie între *Z* şi *Y* să decurgă în chip necesar, termenul mediu („Z" de mai sus) trebuie să fie „universal" într-una dintre premise. Altfel spus, propoziţia trebuie să conţină „toţi *Z*". De Morgan a arătat că presupunerea era falsă. În cartea sa *Logica formală* (publicată în 1847), el arată că din premise de tipul „majoritatea *Z* sunt X" şi „majoritatea *Z* sunt Y", decurge în mod necesar că „unii *X* sunt *Y*". De pildă, propoziţia „majoritatea oamenilor mănâncă pâine" şi „majoritatea oamenilor mănâncă mere" implică inevitabil că „unii oameni mănâncă atât pâine, cât şi mere". De Morgan merge mai departe, exprimând noul silogism într-o formă cantitativă precisă. Să ne închipuim că numărul total de *Z* este *z*, numărul acelor *Z* care sunt în acelaşi timp *X* este *x*, iar numărul acelor *Z* care sunt în acelaşi timp *Y* este *y*. În exemplul de mai sus, pot fi 100 de oameni în total (z = 100), dintre care 57 mănâncă pâine (x = 57), iar 69 mănâncă mere (*y* = 69). Atunci, observă de Morgan, trebuie ca cel puţin (x + *y* – z) de *X* să fie în acelaşi timp Y. Cel puţin 26 de oameni (pentru că 57 + 69 – 100 = 26) trebuie să mănânce atât pâine, cât şi mere.

Din nefericire, această ingenioasă metodă de cuantificare a predicatului l-a antrenat pe de Morgan într-o

dispută publică neplăcută. Filosoful scoţian William Hamilton (1788 – 1856) – a nu se confunda cu matematicianul irlandez William Rowan Hamilton – l-a acuzat pe de Morgan de plagiat, deoarece Hamilton publicase idei oarecum înrudite (dar mult mai puţin precise) cu câţiva ani înaintea lui de Morgan. Atacul lui Hamilton nu era deloc surprinzător, dată fiind atitudinea sa generală faţă de matematică şi matematicieni. A spus odată: „Un studiu excesiv al matematicii face mintea absolut incapabilă de acele energii pe care le cer filosofia şi viaţa”. Valul de scrisori înveninate care a urmat acuzaţiei lui Hamilton a produs involuntar un rezultat pozitiv: algebristul

George Boole s-a îndreptat spre logică. Boole povestea mai târziu în *Analiza matematică a logicii*:

În primăvara acelui an, atenţia mi-a fost atrasă de disputa dintre Sir W. Hamilton şi profesorul de Morgan; interesul stârnit de aceasta m-a îndemnat să reiau şirul aproape complet uitat al cercetărilor mai vechi. Deşi logica putea fi privită în raport cu noţiunea de cantitate, mi-am dat seama că în ea exista şi un sistem mai profund de relaţii. Dacă erai îndreptăţit s-o priveşti *din afară,* căci e legată prin intermediul Numărului de intuiţiile asupra Spaţiului şi Timpului, erai de asemenea îndreptăţit s-o priveşti *dinăuntru,* căci se întemeiază pe fapte de alt ordin, care sălăşluiesc în alcătuirea Minţii.

Aceste cuvinte modeste prezintă începutul a ceea ce avea să devină un rezultat remarcabil în logica simbolică.

Legile gândirii

George Boole (figura 47) s-a născut pe 2 noiembrie 1815 în oraşul industrial Lincoln din Anglia. Tatăl său, John Boole, cizmar de meserie, arătase un mare interes pentru matematică şi construise cu îndemânare diverse instrumente optice, iar mama lui Boole, Mary Ann Joyce, era cameristă. Cu un tată căruia nu-i stătea gândul la meseria lui, familia n-o ducea strălucit din punct de vedere material. George urmează de la şapte ani o şcoală unde îl are ca învăţător pe un anume John Walter Reeves. În

copilărie, Boole e atras mai ales de latină, pe care o învaţă de la un librar, şi de greacă, pe care o învaţă singur. La paisprezece ani, reuşeşte să traducă un poem al poetului grec Meleagros, din secolul I î.Hr. Mândru de George, tatăl îi publică traducerea în ziarul *Lincoln Herald* – ceea ce provoacă riposta unui profesor din oraş, care îşi exprimă într-un articol neîncrederea. Sărăcia de acasă îl sileşte pe George Boole să lucreze ca ajutor de învăţător de la vârsta de şaisprezece

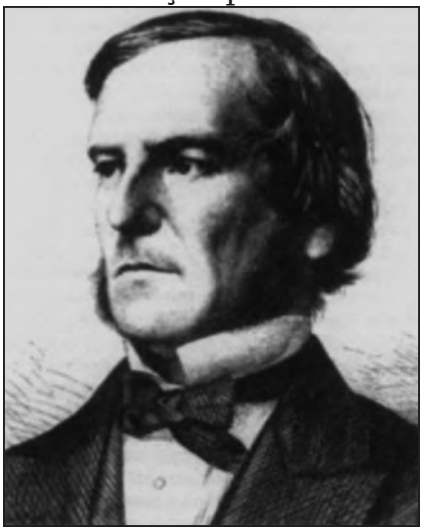


Figura 47 ani. În următorii ani îşi dedică timpul liber studiului francezei, italianei şi germanei. Cunoaşterea limbilor moderne s-a dovedit utilă, permiţându-i să-şi îndrepte atenţia către lucrările importante ale unor matematicieni precum Sylvestre Lacroix, Laplace, Lagrange sau Jacobi. Dar nici aşa n-a putut urma cursuri regulate de matematică, şi a continuat să studieze pe cont propriu, contribuind în acelaşi timp din salariul său la întreţinerea familiei. Talentele matematice ale acestui autodidact ies totuşi la iveală, Boole publicând articole în *Cambridge Mathematical Journal.*

În 1842 Boole începe să corespondeze regulat cu de Morgan, căruia îi supune atenţiei lucrările sale de matematică. Graţie faimei lui de matematician original şi

recomandărilor călduroase din partea lui de Morgan, Boole primeşte în 1849 un post de profesor de matematică la Queen's College, în oraşul Cork din Irlanda, unde va continua să predea până la sfârşitul vieţii. În 1855 se căsătoreşte cu Mary Everest (după al cărei unchi, topograful George

Everest, a fost numit muntele), cu şaptesprezece ani mai tânără, iar cuplul va avea cinci fiice. Într-o zi friguroasă din iarna lui 1864 Boole se udă până la piele în drum spre şcoală, dar insistă să-şi ţină lecţiile, chiar dacă hainele îi erau leoarcă. Acasă, soţia îi agravează pesemne starea, turnând găleţi de apă în pat, pentru a se conforma superstiţiei care spunea că leacul trebuia să repete cumva cauza bolii. Boole face pneumonie şi moare pe 8 decembrie 1864. Bertrand Russell nu şi-a ascuns admiraţia faţă de acest autodidact: „Matematica pură a fost descoperită de Boole, într-o lucrare pe care a intitulat-o *Legile gândiri* (1854). […] Cartea sa se ocupa de fapt de logica formală, care e acelaşi lucru cu matematica". Surprinzător pentru acea vreme, atât Mary Boole (1832 – 1916) cât şi toate cele cinci fiice Boole şi-au dobândit celebritatea în domenii mergând de la educaţie până la chimie.

Boole a publicat *Analiza matematică a logicii* în 1847 şi *Legile gândirii* în 1854 (titlul ei complet este: *O cercetare a legilor gândirii, pe care se întemeiază teoriile matematice ale logicii şi probabilităţilor).* Acestea au fost veritabile capodopere – primele lucrări care au dus cu un uriaş pas mai departe paralelismul dintre operaţiile logice şi cele aritmetice. Boole a transformat practic logica într-un tip de algebră (care avea să se numească *algebră booleană)* şi a extins analiza logicii chiar şi la raţionamentul probabilistic. Iată ce spunea Boole:

Scopul tratatului *[Legile gândirii]* este de a cerceta legile fundamentale ale acelor operaţii ale minţii prin care e efectuat raţionamentul; de a le exprima în limbajul simbolic al calculului [algebra logicii sau algebra booleană], iar, pornind de aici, de a întemeia ştiinţa logicii şi a-i elabora metoda; de a face din această metodă baza

unei metode generale de aplicare a teoriei matematice a probabilităţilor; şi, în cele din urmă, de a aduna, din diferitele fragmente de adevăr aduse la lumină în cursul acestor cercetări, unele indicii privind natura şi alcătuirea minţii omeneşti.

Calculul lui Boole [algebra booleana] poate fi aplicat la relaţiile dintre *mulţimi*[23] (ansambluri de obiecte sau de elemente) sau în cadrul logicii *propoziţiilor.* De pildă, dacă *x* şi *y* sunt mulţimi, atunci o relaţie de tipul *x* = *y* înseamnă ca cele două mulţimi au exact aceleaşi elemente, chiar dacă sunt definite diferit. De pildă, dacă toţi copiii dintr-o şcoala au mai puţin de doi metri, atunci două mulţimi definite prin *x* = „toţi copiii din şcoala" şi *y* = „toţi copiii din şcoala care au mai puţin de doi metri" sunt egale. Dacă *x* şi *y* reprezintă propoziţii, atunci *x* = *y* înseamnă ca cele două propoziţii sunt echivalente (una e adevărata dacă şi numai dacă şi cealaltă e adevărata). De pildă, propoziţiile *x* = „John Barrymore e fratele lui Ethel Barrymore" şi *y* = „Ethel Barrymore e sora lui John Barrymore" sunt egale. Expresia „x – y „reprezintă partea comuna a celor două mulţimi *x* şi *y* (acei membri care aparţin atât lui x, cât şi lui y) sau *conjuncţia*[24] propoziţiilor *x* şi*y* (adică „x *siy"*). De pildă, dacă *x* e mulţimea proştilor satului, iar*y* mulţimea tuturor lucrurilor cu păr negru, atunci *x* – *y* ar fi mulţimea proştilor cu păr negru din acel sat. Pentru propoziţiile *x* şi y, conjuncţia *x* – *y* (sau cuvântul „şi") înseamnă ca ambele propoziţii trebuie să fie adevărate. De exemplu, atunci când Administraţia Automobilelor spune ca „trebuie să treceţi un test de vedere periferica şi un test de conducere", înseamnă ca ambele condiţii trebuie îndeplinite. La Boole, pentru două mulţimi fără niciun element comun, expresia „x + y „reprezenta mulţimea

---

23 In original se foloseşte termenul „clasa" *(class),* perfect echivalent aici cu cel de „mulţime". L-am ales pe al doilea pentru firescul exprimarii în româna. *(N. t.)*

24 *Conjunction* înseamna în engleza şi „conjuncţie", şi „intersecţie" - primul termen aplicându-se logicii propoziţiilor, iar al doilea teoriei mulţimilor. Folosirea unui singur termen subliniază legatura între cele doua domenii. (N.t.)

constând atât din elementele lui x, cât şi din cele ale lui y. În cazul propoziţiilor, „x + y „corespunde lui „fie *x*, fie *y*, dar nu ambele”. De pildă, dacă *x* este propoziţia „cepurile sunt pătrate”, iar *y* este propoziţia „cepurile sunt rotunde”[25], atunci *x + y* este propoziţia „cepurile sunt fie pătrate, fie rotunde”. În mod asemănător, „*x* – y „reprezintă mulţimea acelor elemente ale lui *x* care nu sunt elemente ale lui y, sau propoziţia, x, dar nu y”. Boole a notat mulţimea universală (conţinând toate elementele ce pot fi aduse în discuţie) prin 1, iar mulţimea vidă sau nulă (care nu are niciun element) prin 0. Observaţi că mulţimea vidă nu este acelaşi lucru cu numărul 0 – acesta din urmă e doar numărul de elemente ale mulţimii vide. Observaţi de asemenea că mulţimea vidă nu e acelaşi lucru cu nimic, pentru că o mulţime care nu conţine nimic este totuşi o mulţime. De pildă, dacă toate ziarele din Albania sunt scrise în albaneză, atunci mulţimea tuturor ziarelor în albaneză din Albania ar fi desemnată prin 1 în notaţia lui Boole, iar mulţimea tuturor ziarelor în spaniolă din Albania ar fi desemnată prin 0. Pentru propoziţii, 1 reprezintă propoziţia *adevărată* standard (de pildă, oamenii sunt muritori), iar 0 propoziţia *falsă* standard (de pildă, oamenii sunt nemuritori).

Cu aceste convenţii, Boole a putut formula un set de axiome definind o algebră a logicii. De pildă, putem să verificăm că, prin folosirea definiţiilor de mai sus, propoziţia evident adevărată „totul este fie x, fie non x „poate fi scrisă în algebra booleană ca *x* + (1 – x) = 1, ceea ce este de asemenea adevărat în algebra obişnuită. În mod asemănător, afirmaţia că 0 – *x* = 0 reprezintă partea comună între o mulţime oarecare şi mulţimea vidă, ceea ce înseamnă că e falsă conjuncţia dintre orice propoziţie şi o propoziţie falsă. De pildă, conjuncţia „zahărul este dulce şi oamenii sunt nemuritori” este o propoziţie falsă, în ciuda faptului că prima parte e adevărată. Observaţi din nou că această „egalitate” din algebra booleană rămâne adevărată

25 Joc de cuvinte pornind de la expresia *to be a squarepeg in a round hole* (a fi un cep patrat într-o gaura rotunda) = a nu fi în largul tau. *(N. t.)*

şi pentru numerele algebrice obişnuite.

Pentru a demonstra forţa metodelor sale, Boole a încercat să folosească simbolurile logice la tot ce a considerat important. De pildă, a analizat chiar şi argumentele filosofilor Samuel Clarke şi Baruch Spinoza privind existenţa şi atributele lui Dumnezeu. Concluzia sa a fost, totuşi, mai curând pesimistă: „Cred că e imposibil să încheiem lectura atentă a argumentelor lui Clarke şi Spinoza fără să fim profund convinşi de futilitatea tuturor încercărilor de a demonstra, complet a priori, existenţa unei Fiinţe Infinite, a atributelor Sale şi a relaţiei Sale cu universul". În ciuda soliditătii concluziei lui Boole, se pare că nu toată lumea a fost convinsă de futilitatea unor asemenea încercări, căci versiuni revizuite ale argumentelor ontologice privind existenţa lui Dumnezeu continuă să apară chiar şi azi.

În general, Boole a reuşit să manipuleze conectorii logici *şi, sau, dacă... atunci, şi nu,* care se află acum în centrul operaţiilor efectuate de calculatoare şi diverse circuite de comutare, aşa încât mulţi îl consideră drept unul dintre „profeţii" care au deschis calea spre epoca digitală. Totuşi, aflându-se încă la începuturi, algebra lui Boole nu era perfectă. Mai întâi, textele lui Boole sunt oarecum ambigue şi greu de înţeles din pricina unor notaţii prea apropiate de cele din algebra obişnuită. În al doilea rând, Boole a complicat distincţia dintre propoziţii (de pildă, „Aristotel e muritor"), funcţii propoziţionale sau predicate (de pildă „x este muritor") şi afirmaţii cuantificate (de pildă, „pentru orice *x, x* este muritor"). În cele din urmă, Frege şi Russell aveau să spună că algebra provine din logică, iar atunci era mai firesc să se construiască algebra pe baza logicii decât invers.

Mai exista însă un aspect al cercetărilor lui Boole care avea să se dovedească foarte rodnic. Acesta a fost înţelegerea legăturii strânse dintre logică şi noţiunea de *clasă* sau *mulţime.* Să ne amintim că algebra booleană se aplică la fel de bine mulţimilor şi propoziţiilor logice. Într-adevăr, atunci când toate elementele unei mulţimi X sunt

şi elemente ale mulţimii *Y* (X este o *submulţime* a lui *Y*), acest fapt poate fi exprimat ca o *implicaţie logică* de forma „dacă *X*, atunci *Y*”. De pildă, faptul că mulţimea tuturor cailor e o submulţime a tuturor animalelor patrupede poate fi rescris sub forma afirmaţiei logice „Dacă *X* este un cal, atunci este un animal patruped”.

Algebra booleană a logicii a fost ulterior extinsă şi perfecţionată de mai mulţi cercetători, dar cel care a exploatat complet paralelismul dintre mulţimi şi logică, şi care a ridicat totul la un nou nivel conceptual a fost Gottlob Frege (figura 48).

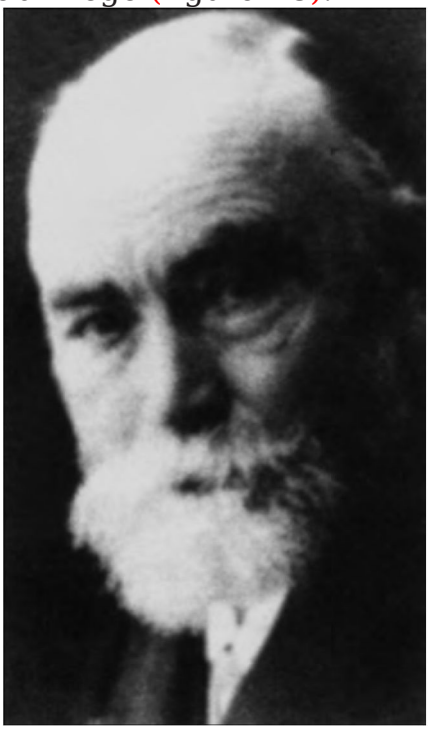


Figura 48

Friederich Ludwig Gottlob Frege s-a născut la Wismar, în Germania, unde atât tatăl, cât şi mama sa aveau să fie, la momente diferite, directori ai liceului de fete. Studiază matematica, fizica, chimia şi filosofia, întâi la Universitatea din Jena, apoi, încă doi ani, la Universitatea din Göttingen. După terminarea studiilor, începe să predea

la Jena în 1874, unde va rămâne de-a lungul întregii sale cariere. În pofida unui program didactic încărcat, Frege reuşeşte să publice în 1879 o primă lucrare revoluţionară în logică: *Scriere conceptuală, un limbaj formal pentru gândirea pură, după model aritmetic* (cunoscută îndeobşte ca *Begriffsschrift – Scriere conceptuală).* Frege elaborează aici un limbaj logic original, pe care avea să-l îmbogăţească mai târziu în cele două volume din

Legile fundamentale ale aritmeticii (Grundgesetze der Arithmetic). Planul lui Frege în logică era precis şi în acelaşi timp extrem de ambiţios. Concentrându-se la început asupra aritmeticii, el a vrut să arate că până şi concepte familiare precum numerele naturale 1, 2, 3… puteau fi reduse la construcţii logice. Prin urmare, Frege credea că toate adevărurile aritmeticii puteau fi demonstrate pornind de la câteva axiome din logică. Cu alte cuvinte, nici măcar o afirmaţie de tipul 1 + 1 = 2 nu era un adevăr *empiric,* bazat pe observaţie, ci unul care putea fi dedus dintr-un set de axiome logice. *Begriffsschrift* a avut o asemenea influenţă, încât logicianul contemporan Willard Van Orman Quine (1908 – 2000) spunea odată: „Logica este un domeniu vechi, iar din 1879 a devenit unul important".

În centrul filosofiei lui Frege se află afirmaţia că adevărul e independent de judecata umană. În *Legile fundamentale ale aritmeticii,* el scrie: „A fi adevărat nu este acelaşi lucru cu a trece drept adevărat, în ochii unui singur om sau în ochii întregii lumi, şi nu se poate reduce la aceasta. Nu există nicio contradicţie în faptul că un lucru pe care toţi îl consideră fals este adevărat. Prin «legile logicii» înţeleg legile adevărului, nu legile psihologice care iau lucrurile drept adevărate […] ele [legile adevărului] sunt pietre de hotar aşezate pe temelii eterne, pe care gândirea noastră le poate acoperi, dar niciodată clinti".

Axiomele logice ale lui Frege iau în general forma „pentru orice. dacă. atunci". De pildă, una dintre axiome sună aşa: „pentru orice *p*, dacă non – (non-*ţi*), atunci *p*".

Această axiomă afirmă că, dacă o propoziţie care contrazice propoziţia în cauză e falsă, atunci propoziţia e adevărată. De pildă, dacă nu e adevărat că nu trebuie să opreşti maşina la stop, atunci e sigur că trebuie să opreşti la stop. Pentru a elabora cu adevărat un „limbaj logic", Frege a adăugat o nouă trăsătură importantă setului de axiome. A înlocuit stilul tradiţional subiect/predicat al logicii clasice prin concepte împrumutate din teoria matematică a funcţiilor. Voi explica pe scurt. Când scriem, în matematică, expresii de tipul fx) = 3 x + 1, aceasta înseamnă că *f* este o funcţie de variabilă x şi că valoarea funcţiei se obţine înmulţind valoarea variabilei cu trei şi adăugând unu. Frege a definit ca funcţii ceea ce el numea *concepte.* Să presupunem, de exemplu, că vrem să luăm în discuţie conceptul „este carnivor". Acest concept e notat simbolic printr-o funcţie „F (x)", iar valoarea acestei funcţii este „adevărată" dacă *x* = leu, şi „falsă" dacă *x* = căprioară. În mod asemănător, în privinţa numerelor, conceptul (funcţia) „a fi mai mic decât 7" face să corespundă valorii „fals" toate numerele mai mari sau egale cu 7, şi valorii „adevărat" toate numerele mai mici decât 7. La Frege, obiectele pentru care un concept ia valoarea „adevărat" sunt cele care „sunt conţinute" în acel concept.

După cum am văzut, Frege credea cu tărie că fiecare propoziţie despre numerele naturale poate fi cunoscută şi dedusă numai prin definiţii şi legi logice. Prin urmare, şi-a început expunerea pe tema numerelor naturale fără a cere o înţelegere prealabilă a noţiunii de „număr". De pildă, folosind limbajul logic al lui Frege, două concepte sunt *echinumerice* (adică le este asociat acelaşi număr) dacă există o corespondenţă biunivocă între obiectele care „sunt conţinute" într-un concept şi cele care „sunt conţinute" în celălalt concept. De pildă, capacele lăzilor de gunoi sunt echinumerice cu lăzile însele (dacă toate au capac), iar definiţia nu are nevoie să facă apel la numere. Frege a introdus apoi o definiţie logică ingenioasă a numărului 0. Fie un concept *F* definit prin „nu identic cu sine". Cum

fiecare obiect trebuie să fie identic cu sine, niciun obiect nu intră în categoria lui *F.* Cu alte cuvinte, pentru orice obiect x, F (x) = fals. Frege a definit numărul obişnuit zero drept „numărul conceptului *F*". A continuat apoi definind toate numerele naturale în raport cu nişte entităţi pe care le-a numit *extensiuni.*[26] Extensiunea unui concept este mulţimea tuturor obiectelor conţinute în acel concept. Deşi această definiţie nu e cea mai uşor de digerat pentru un nelogician, în realitate e foarte simplă. Extensiunea conceptului de „femeie", de pildă, e mulţimea tuturor femeilor. Să observăm că extensiunea „femeii" nu e ea însăşi o femeie.

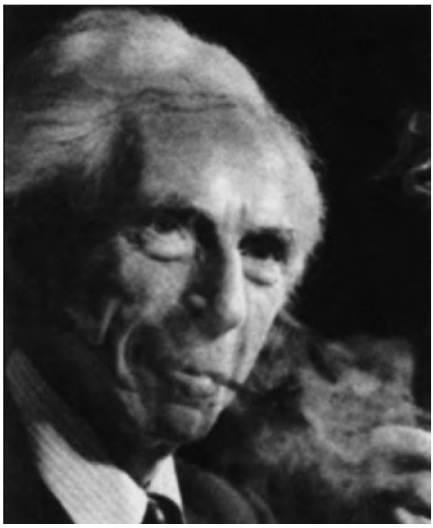
Vă veţi întreba cum ajută această definiţie logică abstractă la definirea numărului 4, de pildă. Potrivit lui Frege, numărul 4 e extensiunea (sau clasa) tuturor conceptelor care au patru obiecte conţinute în ele. Astfel, conceptul de „a fi un picior al unui câine pe nume Snoopy" aparţine acestei clase (şi deci numărului 4), la fel precum conceptul de „a fi bunic/bunică al/a lui Gottlob Frege".

Programul lui Frege era impresionant, dar avea şi unele neajunsuri. Pe de o parte, ideea de a folosi concepte – pâinea de toate zilele a gândirii – pentru a construi aritmetica era de-a dreptul genială. Pe de altă parte, Frege nu a observat anumite inconsecvenţe esenţiale în formalismul său. În particular, s-a dovedit că una dintre axiome – cunoscută drept *Legea fundamentală V* – conduce la o contradicţie, fiind prin urmare vulnerabilă.

Legea spune, într-un mod aparent inocent, că extensiunea conceptului *F* este identică cu extensiunea conceptului *G* dacă şi

---

26 Am folost terminologia care apare în traducerea lui Sorin Vieru din Gottlob Frege, *Fundamentele aritmeticii* (Editura Humanitas, Bucureşti, 2000). *(N. t.)*



numai dacă *F* şi *G* conţin aceleaşi obiecte. Dar bomba a explodat pe 16 iunie 1902, când, într-o scrisoare către Frege, Bertrand Russell (figura 49) a scos în evidenţă un paradox care arăta că *Legea fundamentală V* ducea la contradicţii. Destinul a vrut ca scrisoarea lui Russell să ajungă chiar în momentul când al doilea volum al *Legilor fundamentale ale aritmeticii* pleca la tipar. Şocat, Frege se grăbeşte să adauge în manuscris o mărturisire sinceră: „Nu se poate închipui ceva mai neplăcut pentru un om de ştiinţă decât să vadă cum se surpă temelia operei sale tocmai atunci când a încheiat-o. Am fost pus în această situaţie de o scrisoare primită de la domnul Bertrand Russell în momentul în care lucrarea era aproape tipărită". Lui Russell, Frege îi răspunde cu multă eleganţă: „Contradicţia pe care aţi descoperit-o mi-a provocat o mare surpriză şi aproape consternare, aş spune, căci a zguduit fundaţia pe care voiam să clădesc aritmetica".

Faptul că un singur paradox a avut asemenea efect devastator asupra unui întreg program ce urmărea să pună bazele matematicii poate părea surprinzător, dar, după cum spunea logicianul W.V.O. Quine de la Universitatea Harvard: „S-a întâmplat de mai multe ori în istorie ca

descoperirea unui paradox să fie prilej pentru reconstrucţia radicală a fundamentelor gândirii”. Paradoxul lui Russell oferea tocmai un asemenea prilej.

Paradoxul lui Russell

Omul care a creat aproape de unul singur teoria mulţimilor a fost matematicianul german Georg Cantor. Mulţimile, sau clasele, s-au dovedit imediat esenţiale şi strâns legate de logică, încât orice încercare de a construi matematica pe baza logicii presupunea folosirea fundamentului axiomatic al teoriei mulţimilor.

O mulţime sau o clasă este pur şi simplu un ansamblu de obiecte. Între obiecte nu e nevoie să existe vreo relaţie. Putem avea o mulţime conţinând următoarele elemente: telenovelele difuzate în 2003, calul alb al lui Napoleon şi noţiunea de iubire sinceră.

Elementele care aparţin unei anumite mulţimi se numesc *membrii* acelei mulţimi.

Majoritatea mulţimilor de obiecte pe care e probabil să le întâlnim nu sunt membre ale lor însele. De pildă, mulţimea tuturor fulgilor de zăpadă nu este în sine un fulg de zăpadă, mulţimea tuturor ceasurilor vechi nu este un ceas vechi etc. Dar unele mulţimi sunt de fapt membre ale lor însele. De exemplu, mulţimea a „tot ce nu este ceas de colecţie” este o membră a ei înseşi, deoarece această mulţime cu certitudine nu este un ceas de colecţie. În mod asemănător, mulţimea tuturor mulţimilor este membră a ei înseşi, deoarece, evident, este o mulţime. Ce putem spune însă despre mulţimea „tuturor mulţimilor care nu sunt membre ale lor însele”? Să notăm această mulţime cu *R.* Este *R* membră a ei înseşi (a lui R) sau nu? Cu siguranţă *R* nu poate aparţine lui R, fiindcă, dacă ar aparţine, ar încălca definiţia apartenenţei la *R.* Dar, dacă *R* nu aparţine ei înseşi, atunci, potrivit definiţiei, trebuie să fie membră a lui R. Asemănător situaţiei frizerului din sat, găsim că *R* aparţine şi, în acelaşi timp, nu aparţine lui R, ceea ce e o contradicţie logică. Acesta era paradoxul pe care Russell i-l trimisese lui Frege. Deoarece această antinomie subminase întregul proces prin care puteau fi determinate

clasele sau mulţimile, lovitura dată programului lui Frege era fatală. Frege a făcut câteva încercări disperate de a-şi salva sistemul de axiome, dar a eşuat. Concluzia părea dezastruoasă – logica formală era mai vulnerabilă la contradicţiile paralizante, în loc să fie mai solidă decât matematica.

Pe când Frege îşi elabora programul logicist, matematicianul şi logicianul italian Giuseppe Peano urma o cale oarecum diferită. Peano voia să aşeze aritmetica pe o bază axiomatică. A pornit deci de la formularea unui set simplu şi concis de axiome. De pildă, primele trei axiome sunau astfel:

1. Zero este un număr.
2. Succesorul oricărui număr este de asemenea un număr.
3. Nu există două numere cu acelaşi succesor.

Figura 50

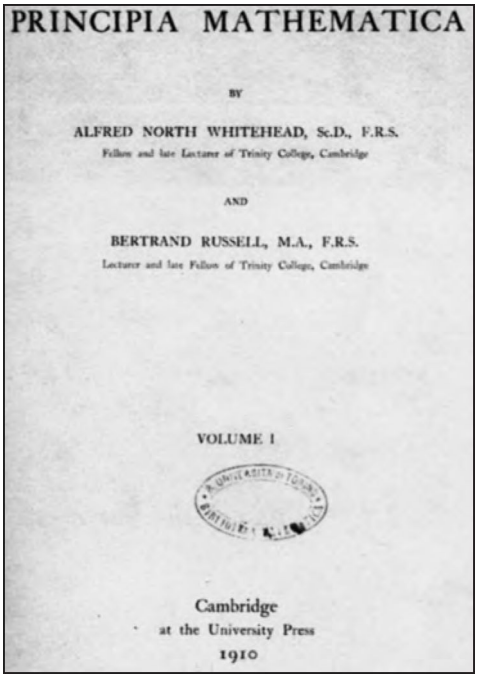
Problema era că, deşi sistemul axiomatic al lui Peano putea reproduce într-adevăr legile cunoscute ale aritmeticii (atunci când erau introduse definiţii suplimentare), numerele naturale nu puteau fi identificate în mod unic.

Pasul următor a fost făcut de Bertrand Russell. El susţinea că ideea iniţială a lui Frege de a deduce

aritmetica din logică era totuşi calea de urmat. În consecinţă, Russell a creat, împreună cu Alfred North Whitehead (figura 50) o capodoperă a logicii – cele trei volume din *Principia mathematica.* Cu excepţia *Organon-ului* lui Aristotel, aceasta a fost pesemne cartea cu cel mai mare impact din istoria logicii (figura 51 prezintă pagina de gardă a primei ediţii).

În *Principia,* Russell şi Whitehead susţineau că matematica e în esenţă o detaliere a legilor logicii, fără ca între matematică şi logică să se poată trasa o graniţă precisă. Pentru a ajunge la o prezentare coerentă, antinomiile şi paradoxurile (mai fuseseră descoperite şi altele în afară de paradoxul lui Russell) trebuiau cumva ţinute sub control, iar aceasta presupunea jonglerii logice complicate. Russell credea că paradoxurile apăreau numai din cauza unui „cerc vicios" în care erau definite entităţi în funcţie de o mulţime de obiecte care conţinea entitatea definită. El spunea: „Dacă spun «Napoleon avea toate calităţile pentru a fi un mare general», trebuie să definesc «calităţile» în aşa fel încât să nu includă ceea ce spun acum, adică «a avea toate calităţile care fac un mare general» nu trebuie să fie ea însăşi o calitate în sensul presupus".

Pentru a evita paradoxul, Russell a propus o *teorie a tipurilor,* în care o mulţime (sau clasă) aparţine unui tip logic mai înalt decât cel căruia îi aparţin membrii ei. De pildă, toţi jucătorii individuali


PRINCIPIA MATHEMATICA

BY

ALFRED NORTH WHITEHEAD, Sc.D., F.R.S.
Fellow and late Lecturer of Trinity College, Cambridge

AND

BERTRAND RUSSELL, M.A., F.R.S.
Lecturer and late Fellow of Trinity College, Cambridge

VOLUME I

Cambridge
at the University Press
1910

din echipa de fotbal Dallas Cowboys sunt de tipul 0. Echipa Dallas Cowboys, care este o mulţime de jucători, este de tipul 1. Liga Naţională de Fotbal, care este o mulţime de echipe, este de tipul 2; un ansamblu de ligi (dacă ar exista vreunul) ar fi de tipul 3 etc. În această schemă, simpla noţiune „o mulţime care e membră a ei înseşi” nu e nici adevărată, nici falsă, ci pur şi simplu fără sens. Prin urmare, nu ne confruntăm niciodată cu paradoxuri de tipul paradoxului lui Russell.

Nu încape îndoială că *Principia* era o realizare măreaţă în domeniul logicii, dar nu putea fi considerată ca îndelung căutata fundamentare a matematicii. Teoria tipurilor propusă de Russell era privită de mulţi ca un remediu oarecum artificial la problema paradoxurilor – şi, în plus, producea ramificaţii tulburător de complexe. De pildă, numerele raţionale (adică fracţiile simple) se dovedeau a fi de un tip mai înalt decât numerele naturale. Pentru a evita unele dintre aceste complicaţii, Russell şi Whitehead au introdus o axiomă suplimentară – axioma

reductibilităţii, care, la rândul ei, a generat serioase controverse şi neîncredere.

Căi mai elegante de a elimina paradoxurile au fost în cele din urmă propuse de matematicienii Ernst Zermelo şi Abraham Fraenkel. Ei au reuşit să axiomatizeze teoria mulţimilor într-un mod coerent şi să reproducă majoritatea rezultatelor din teoria mulţimilor. Părea să fie măcar o împlinire parţială a visului platonicienilor. Dacă teoria mulţimilor şi logica erau într-adevăr două feţe ale aceleiaşi monede, atunci o fundamentare solidă a teoriei mulţimilor implica o fundamentare solidă a logicii. Dacă, în plus, o mare parte a matematicii decurgea din logică, atunci aceasta dădea matematicii un fel de certitudine obiectivă, care putea fi eventual folosită pentru a explica eficacitatea matematicii. Din păcate, platonicienii nu s-au putut bucura prea mult timp, pentru că erau pe punctul să aibă de-a face cu un caz grav de déjà vu.

Se repetă oare criza neeuclidiană?

În 1908, matematicianul german Ernst Zermelo (1871 – 1953) urma o cale foarte asemănătoare celei deschise de Euclid pe la 300 î.Hr. Euclid a formulat câteva postulate nedemonstrate, dar pe care le-a presupus de la sine-înţelese, despre puncte şi drepte, iar apoi a construit geometria pe baza acestor axiome. Zermelo – care descoperise independent paradoxul lui Russell încă din 1900 – a propus un mod de a construi teoria mulţimilor pe o bază axiomatică analogă. Paradoxul lui Russell era evitat în această teorie printr-o alegere atentă a principiilor de construcţie care eliminau ideile contradictorii de genul „mulţimii tuturor mulţimilor”. Schema lui Zermelo a fost dezvoltată în 1922 de matematicianul israelian Abraham Fraenkel (1891 – 1965) pentru a deveni ceea ce se numeşte teoria mulţimilor Zermelo-Fraenkel (alte modificări importante au fost operate de John von Neumann în 1925). Lucrurile ar fi fost aproape perfecte (mai rămânea de demonstrat caracterul necontradictoriu) dacă n-ar fi apărut anumite bănuieli. Una dintre axiome – *axioma alegerii* – le dădea dureri de cap matematicienilor,

întocmai ca faimoasa „a cincea” axiomă a lui Euclid. Simplu spus, axioma alegerii afirmă: Dacă X este un ansamblu (mulţime) de mulţimi nevide, atunci putem alege câte un singur element din fiecare mulţime din X pentru a forma o nouă mulţime Y. Se poate uşor verifica adevărul acestei afirmaţii dacă ansamblul X este finit. De pildă, dacă avem o sută de cutii, fiecare conţinând cel puţin o bilă, putem alege o bilă din fiecare cutie pentru a forma o nouă mulţime Y care conţine o sută de bile. În acest caz, nu avem nevoie de o axiomă specială; putem demonstra că o alegere e posibilă. Afirmaţia este adevărată chiar şi pentru ansambluri X infinite, atâta timp cât putem preciza exact cum facem alegerea. Să ne imaginăm, de pildă, un ansamblu infinit de mulţimi nevide de numere naturale. Membrii acestui ansamblu pot fi mulţimi de tipul (2, 6, 7}, (1, 0}, (346, 5, 11, 1257}, (toate numerele naturale dintre 381 şi 10 457} şi aşa mai departe. În fiecare mulţime de numere naturale, există întotdeauna un cel mai mic element. Alegerea noastră poate fi descrisă în mod unic astfel: „Din fiecare mulţime alegem cel mai mic element”. În acest caz, putem evita iarăşi nevoia de a avea o axiomă a alegerii. Problema apare pentru ansamblurile infinite atunci când nu putem defini o alegere. În asemenea condiţii, procesul alegerii nu se sfârşeşte niciodată, iar existenţa unei mulţimi conţinând câte un singur element din fiecare membru al ansamblului X devine o chestiune de credinţă.

De la bun început axioma alegerii a provocat mari controverse printre matematicieni. Faptul că axioma afirmă existenţa anumitor obiecte matematice (adică alegeri) fără a oferi exemplul concret al vreunuia dintre ele, a atras fulgere, mai ales din partea adepţilor şcolii de gândire cunoscute drept *constructivism* (înrudit filosofic cu *intuiţionismul).* Constructiviştii susţineau că tot ce există trebuie să poată fi construit explicit. Alţi matematicieni înclinau şi ei să evite axioma alegerii şi foloseau numai celelalte axiome din teoria mulţimilor Zermelo-Fraenkel.

Neajunsurile axiomei alegerii i-au făcut pe

matematicieni să se întrebe dacă ea nu putea fi demonstrată sau respinsă pe baza celorlalte axiome. Se repeta practic istoria celei de-a cincea axiome a lui Euclid. Un răspuns parţial a fost dat în cele din urmă la sfârşitul anilor 1930. Kurt Godel (1906 – 1978), unul dintre cei mai mari logicieni din toate timpurile, a demonstrat că axioma alegerii şi o altă faimoasă conjectură datorată fondatorului teoriei mulţimilor Georg Cantor, cunoscută drept *ipoteza continuumului,* nu intrau în contradicţie cu celelalte axiome Zermelo-Fraenkel. Adică, niciuna dintre cele două ipoteze nu putea fi respinsă folosind celelalte axiome standard ale teoriei mulţimilor. Demonstraţii suplimentare datorate matematicianului american Paul Cohen (1934 – 2007, care din păcate a decedat pe când scriam această carte) au stabilit în 1963 completa independenţă a axiomei alegerii şi a ipotezei continuumului. Cu alte cuvinte, axioma alegerii nu poate fi nici demonstrată, nici respinsă folosind celelalte axiome ale teoriei mulţimilor. În mod asemănător, ipoteza continuumului nu poate fi nici demonstrată, nici respinsă folosind acelaşi set de axiome, chiar dacă includem axioma alegerii.

Acest rezultat a avut consecinţe filosofice spectaculoase. Ca şi în cazul geometriilor neeuclidiene din secolul XIX, nu exista o unică teorie definitivă a mulţimilor, ci cel puţin patru! Se puteau face diferite ipoteze privind mulţimile infinite pentru a obţine teorii ale mulţimilor care se exclud reciproc. De pildă, se putea presupune că atât axioma alegerii, cât şi ipoteza continuumului erau adevărate, iar atunci se obţinea o versiune, sau că erau ambele false, iar atunci se obţinea o teorie complet diferită. În mod asemănător, presupunând valabilitatea uneia dintre cele două axiome şi negând-o pe a celeilalte, se obţineau alte două teorii ale mulţimilor.

Se repeta criza neeuclidiană, dar situaţia era încă mai gravă. Rolul fundamental al teoriei mulţimilor ca posibilă bază a întregii matematici făcea ca, pentru platonicieni, lucrurile să stea şi mai rău. Dacă se puteau într-adevăr formula mai multe teorii ale mulţimilor prin

simpla alegere a unui set diferit de axiome, nu era aceasta o dovadă că matematica nu e decât o invenţie omenească? Victoria formaliştilor părea asigurată.

Un adevăr incomplet

În timp ce Frege era preocupat de sensul axiomelor, principalul partizan al formalismului, marele matematician german David Hilbert (figura 52) era împotriva oricărei interpretări a formulelor matematice. Pe Hilbert nu-l interesa dacă matematica putea fi dedusă din noţiuni logice. Pentru el, matematica însemna pur şi simplu un ansamblu de formule fără sens – tipare structurate alcătuite din simboluri arbitrare. Sarcina de a garanta fundamentele matematicii a fost pusă de Hilbert pe seama unei noi discipline, numită de el „metamatematică". Metamatematica trebuia să folosească metodele de analiză ale matematicii pentru a demonstra că întregul proces la care apelează sistemul formal pentru a obţine teoreme din axiome, urmând regulile stricte ale deducţiei, nu conţine contradicţii. Altfel spus, Hilbert credea că putea demonstra matematic că matematica funcţionează. Iată propriile sale cuvinte:

Cercetările mele privind noile fundamente ale matematicii au ca scop pur şi simplu eliminarea, o dată pentru totdeauna, a oricărei îndoieli legate de deducţia matematică. [...]

Tot ce însemna înainte matematică trebuie riguros formalizat, astfel încât matematica propriu-zisă sau matematica în sens strict să devină un rezervor de formule. [...] În plus faţă de această matematică propriu-zisă formalizată, avem o matematică întrucâtva nouă: o matematică necesară pentru a salva matematica, în care – spre deosebire de metodele pur formale de deducţie din matematica propriu-zisă – se aplică deducţia contextuală, dar numai pentru a demonstra coerenţa axiomelor. [...] Astfel, dezvoltarea ştiinţei matematicii ca întreg are loc pe două căi ce alternează în permanenţă: pe de o parte, deducem formule demonstrabile din axiome prin deducţie formală, pe de alta, adăugăm noi axiome şi le demonstrăm

caracterul necontradictoriu prin deducţie contextuală.

Programul lui Hilbert sacrifica sensul pentru a salva fundamentele. Prin urmare, pentru adepţii săi formalişti matematica era într-adevăr doar un joc, dar scopul lor era să demonstreze riguros că jocul era perfect coerent. După toate progresele făcute în axiomatizare, împlinirea acestui vis formalist al „teoriei demonstraţiei”[27] părea să fie la o aruncătură de băţ.

Nu toţi erau convinşi însă că drumul pe care pornise Hilbert era cel bun. Ludwig Wittgenstein (1889 – 1951), considerat de unii drept cel mai mare filosof din secolul XX, vedea în metamatematica lui Hilbert o pierdere de vreme: „Nu putem stabili o regulă pentru aplicarea altei reguli”, spunea el. Cu alte cuvinte.

Figura 52

Wittgenstein nu credea că înţelegerea unui „joc” putea depinde de construirea altuia: „Dacă nu mi-e limpede care e natura matematicii, nicio demonstraţie nu mă poate ajuta”. Cu toate acestea, nimeni nu se aştepta la

27 Teoria demonstraţiei este acea ramură a logicii propusă de Hilbert (în celebra sa prelegere la al doilea Congres Internaţional al Matematicienilor din 1900) pentru a rezolva problema coerenţei matematicii, şi reprezintă o abordare particulară în cadrul metamatematicii. *(N. t.)*

trăsnetul ce urma să cadă. Kurt Godel, un tânăr de douăzeci şi patru de ani, avea să dea o lovitură fatală formalismului.

Kurt Godel (figura 53) s-a născut pe 28 aprilie 1906 în oraşul morav cunoscut mai târziu sub numele ceh Bino. Oraşul făcea pe atunci parte din Imperiul Austro-ungar, iar Godel provenea dintr-o familie în care se vorbea germana. Tatăl, Rudolf Godel, era directorul unei fabrici de textile, iar mama, Marianne Godel, a avut grijă ca tânărul Kurt să studieze temeinic matematica, istoria, limbile străine şi religia. În adolescenţă, Godel prinde gustul matematicii şi filosofiei, iar la 18 ani intră la Universitatea din Viena, unde îl atrage în primul rând logica matematică. E fascinat în special de *Principia mathematica* ale lui Russell şi Whitehead şi de programul lui Hilbert, şi îşi alege ca temă pentru teza de doctorat problema *completitudinii.* În esenţă, scopul cercetărilor sale era de a determina dacă abordarea formală susţinută de Hilbert era suficientă pentru a genera toate propoziţiile adevărate din matematică. Godel îşi susţine doctoratul în 1930, iar un an mai târziu publică *teoremele de incompletitudine*, care transmit unde de şoc în lumea matematicii şi a filosofiei.

În limbaj pur matematic, cele două teoreme sună prea puţin incitant:

1. Orice sistem formal consistent *S,* în care pot fi efectuate anumite operaţiile aritmetice elementare, este incomplet în raport cu propoziţiile aritmeticii elementare: există în *S* propoziţii care nu pot fi nici demonstrate, nici infirmate.
2. Pentru orice sistem formal consistent *S,* în care pot fi efectuate anumite operaţii aritmetice elementare, consistenţa lui *S* nu poate fi demonstrată în cadrul lui *S*.

Cuvintele pot părea benigne, dar consecinţele asupra programului formaliştilor erau imense. Simplu spus, teoremele de

Figura 53 incompletitudine demonstrau că programul formalist al lui Hilbert era condamnat de la bun început. Godel a arătat că orice sistem formal care e suficient de puternic pentru a prezenta interes este fie incomplet, fie inconsistent – adică, în cel mai bun caz, există întotdeauna afirmaţii pe care sistemul formal nu le va putea nici demonstra, nici infirma. În cel mai rău caz, sistemul conduce la contradicţii. Din moment ce, pentru orice propoziţie T, fie T, fie non-T este adevărată, faptul că un sistem formal finit nu poate nici demonstra, nici infirma anumite propoziţii înseamnă că vor exista întotdeauna propoziţii adevărate şi nedemonstrabile în acel sistem. Cu alte cuvinte, Godel a demonstrat că niciun sistem formal alcătuit dintr-un set finit de axiome şi reguli de deducţie nu va putea *vreodată* cuprinde întregul corp de adevăruri ale matematicii. Tot ce putem spera este că axiomatizările acceptate sunt doar incomplete, nu şi inconsistente.

De fapt, Godel credea că există o idee de adevăr matematic, platoniciană şi independentă. Într-un articol din 1947, scria:

Dar, în pofida depărtării lor faţă de experienţa senzorială, avem într-adevăr un fel de percepţie a obiectelor din teoria mulţimilor, după cum se vede din

faptul că axiomele ni se impun ca adevărate. Nu văd niciun motiv pentru care să avem mai puţină încredere în acest gen de percepţie, adică în intuiţia matematică, decât în percepţia senzorială.

Printr-o ironie a sorţii, chiar în momentul în care formaliştii se pregăteau de marşul triumfal, Kurt Godel – platonician declarat – a abătut furtuna asupra paradei programului formalist.

Faimosul matematician John von Neumann (1903 – 1957), care preda pe atunci despre cercetările lui Hilbert, şi-a anulat restul cursului planificat şi a dedicat timpul rămas descoperirilor lui Godel.

Omul Godel era la fel de complex ca teoremele sale. În 1940, a fugit din Austria nazistă împreună cu soţia sa Adele, pentru a ocupa un post la Institutul pentru Studii Avansate de la Princeton, New Jersey. Acolo s-a împrietenit cu Albert Einstein, pe care-l însoţea în lungi plimbări. Când Godel a cerut cetăţenia americană în 1947, Einstein a fost cel care, împreună cu matematicianul şi economistul Oskar Morgenstern (1902 – 1977) de la Universitatea Princeton, l-a însoţit pe Godel la interviul de la Serviciului de Imigraţie şi Naturalizare. Cele petrecute cu ocazia acestui interviu sunt îndeobşte cunoscute, dar spun atât de multe despre personalitatea lui Godel, încât le voi reda în întregime, exact aşa cum şi le-a amintit Oskar Morgenstern pe 13 septembrie 1971. Le sunt recunoscător doamnei Dorothy Morgenstern Thomas, văduva lui Morgenstern, şi Institutului pentru Studii Avansate că mi-au oferit o copie a documentului:

În 1946, Godel a făcut cerere pentru a deveni cetăţean american. M-a rugat pe mine să-i fiu martor, iar ca al doilea martor l-a ales pe Albert Einstein, care a acceptat şi el cu dragă inimă. Einstein şi cu mine ne întâlneam din când în când şi ne tot întrebam ce se putea întâmpla în timpul rămas până la procedurile de naturalizare, ba chiar şi cu ocazia lor.

Godel, pe care îl vedeam, bineînţeles, deseori în aceste luni dinaintea evenimentului, se pregătea temeinic.

Fiind un om foarte meticulos, a început prin a studia istoria primilor oameni care s-au stabilit în America de Nord. A ajuns apoi la istoria amerindienilor, la diversele triburi etc. Mă suna frecvent la telefon pentru bibliografie, pe care o cerceta cu toată atenţia. Au apărut treptat multe întrebări şi, desigur, multe îndoieli privind veridicitatea acestor relatări şi împrejurările pe care le dezvăluiau. Godel a continuat în următoarele săptămâni cu studiul istoriei americane, concentrându-se mai ales asupra problemelor de drept constituţional. Aşa a ajuns să se intereseze de Princeton, şi a vrut să afle de la mine unde anume e graniţa dintre district şi vechiul oraş. Am încercat să-i explic că toate astea erau absolut inutile, dar, bineînţeles, în van. S-a încăpăţânat să caute toate datele de care credea că are nevoie, aşa încât i-am oferit informaţiile cerute, inclusiv cele despre Princeton. A vrut apoi să ştie cum a fost ales Consiliul Orăşenesc, Consiliul Districtului, cine era primarul şi cum funcţiona Consiliul Districtului. Credea că i se puteau pune întrebări pe aceste teme. Dacă se va dovedi că nu cunoaşte oraşul în care trăieşte, va face o impresie proastă.

Am încercat să-l conving că nu se puneau niciodată asemenea întrebări, că majoritatea întrebărilor erau într-adevăr formale şi putea răspunde la ele cu uşurinţă; cel mult putea fi întrebat ce fel de guvern avem în această ţară, cum se numeşte cea mai înaltă Curte sau alte întrebări de genul ăsta. Oricum, el a continuat să studieze Constituţia.

Dar iată că a apărut un element interesant. Foarte tulburat, mi-a spus că, studiind Constituţia, a găsit spre deznădejdea sa anumite contradicţii interne şi că putea demonstra cum, pe o cale perfect legală, era posibil ca cineva să devină dictator şi să instaureze un regim fascist, ceea ce nu fusese niciodată în intenţia celor care redactaseră Constituţia. I-am spus că era extrem de improbabil ca asemenea evenimente să se petreacă vreodată, chiar presupunând că avea dreptate, lucru de care, firește, mă îndoiam. Dar era insistent, aşa încât am

discutat mult pe această temă. Am încercat să-l conving că ar trebui să evite asemenea subiecte la examinarea în faţa tribunalului din Trenton, şi l-am prevenit şi pe Einstein: era îngrozit că lui Godel îi trecuse prin minte o asemenea idee, şi i-a spus şi el să nu-şi mai bată capul cu lucrurile astea şi să nu le mai pomenească.

Au trecut mai multe luni şi, în fine, a sosit data examinării la Trenton. L-am luat pe Godel cu maşina în ziua aceea. S-a aşezat în spate, pe urmă ne-am dus să-l luăm pe Einstein de la locuinţa lui din Mercer Street, iar de acolo ne-am îndreptat spre Trenton. Pe drum, Einstein s-a întors spre Godel şi l-a întrebat: „Godel, eşti *cu adevărat* pregătit pentru examinare?" Fireşte, remarca l-a necăjit teribil pe Godel – exact ce-şi propusese Einstein, care se amuza copios văzând expresia de pe chipul lui Godel. Când am ajuns la Trenton, am fost conduşi într-o încăpere mare şi, deşi în mod normal martorii sunt interogaţi separat faţă de candidat, din cauza prezenţei lui Einstein s-a făcut o excepţie şi am fost invitaţi toţi trei să ne aşezăm alături, cu Godel la mijloc. Examinatorul ne-a întrebat pe Einstein şi pe mine dacă credeam că Godel ar fi un bun cetăţean. L-am asigurat că ar fi, fără îndoială, că era un om remarcabil etc. Apoi s-a întors spre Godel şi i-a spus: „Domnule Godel, de unde veniţi?"

Godel: De unde vin? Din Austria.

Examinatorul: Ce fel de guvern aveaţi în Austria?

Godel: Era republică, dar constituţia era astfel încât s-a transformat până la urmă într-o dictatură.

Examinatorul: O! Asta e foarte rău. Aşa ceva nu s-ar putea întâmpla în ţara asta.

Godel: Ba da, pot s-o *demonstrez.*

Dintre toate temele posibile, tocmai cea critică a fost aleasă de examinator. Einstein şi cu mine ne priveam îngroziţi în timpul acestui schimb de replici; examinatorul a fost totuşi suficient de inteligent pentru a-l reduce repede la tăcere pe Godel spunând „O, Doamne, să nu intrăm în acest subiect", şi, spre marea noastră uşurare, a întrerupt examinarea în acest punct. În cele din urmă am

plecat, iar când ne îndreptam spre lift un bărbat a alergat după noi cu o hârtie şi un stilou şi i-a cerut lui Einstein un autograf. Einstein s-a executat. Când coboram cu liftul, m-am întors spre Einstein şi i-am spus: „Trebuie să fie cumplit să fii persecutat în felul ăsta de atâţia oameni”. Einstein mi-a răspuns: „De fapt, nu e decât ultima rămăşiţă a canibalismului”. N-am înţeles şi i-am zis: „Cum aşa?” Mi-a răspuns: „Păi, da, pe vremuri voiau sângele tău, acum vor cerneala ta”.

Pe urmă am plecat cu maşina înapoi la Princeton, iar când am ajuns la intersecţia cu Mercer Street l-am întrebat pe Einstein dacă voia să se ducă la institut sau acasă. Mi-a răspuns: „Du-mă acasă, munca mea oricum nu mai valorează nimic”. Apoi a citat dintr-un cântec politic american (din păcate, nu-mi amintesc cuvintele, poate le-am notat pe undeva, oricum le-aş recunoaşte dacă le-aş auzi). În drumul spre casă, Einstein s-a mai întors o dată către Godel: „Godel, ăsta a fost penultimul tău examen”. Godel: „Aoleu! Să nu-mi spui că mai am de trecut încă unul!” – şi se îngrijorase deja.

La care Einstein: „Godel, următorul examen îl dai când păşeşti în mormânt”. Godel: „Dar, Einstein, eu nu păşesc în mormânt”, iar Einstein i-a zis: „Godel, era o glumă!”, şi s-au despărţit cu aceste cuvinte. L-am condus pe Godel acasă. Toată lumea era uşurată că se terminase povestea asta colosală; Godel avea din nou mintea liberă să se gândească la probleme de filosofie şi logică.

Spre sfârşitul vieţii, Godel a suferit grave tulburări mentale, ajungând să refuze să mănânce. A murit pe 14 ianuarie 1978, de malnutriţie şi epuizare.

Contrar unor idei vehiculate, din teoremele de incompletitudine ale lui Godel nu rezultă că anumite adevăruri nu vor fi niciodată cunoscute. Teoremele demonstrează în schimb slăbiciunile şi neajunsurile sistemelor formale. Poate părea deci surprinzător că, în pofida importanţei teoremelor pentru filosofia matematicii, impactul lor asupra eficacităţii matematicii ca mecanism de construcţie a teoriilor a fost minim. De fapt, în deceniile

din preajma publicării demonstraţiei lui Godel, matematica repurta succese spectaculoase prin teoriile fizice ale universului. Departe de a fi abandonată ca nefiabilă, matematica, împreună cu concluziile ei logice, devenea tot mai importantă pentru înţelegerea cosmosului.

Ceea ce însemna însă că misterul „imprevizibilei eficacităţi" a matematicii devenea şi mai greu de pătruns. Să ne gândim o clipă ce s-ar fi întâmplat dacă întreprinderea logicistă ar fi izbutit pe deplin. Aceasta ar fi însemnat că matematica provine în întregime din logică – pur şi simplu din legile gândirii. Dar cum ar fi putut o asemenea ştiinţă deductivă să se potrivească atât de bine cu fenomenele naturale? Care e relaţia dintre logica formală (poate ar trebui chiar să spunem logica formală umană) şi cosmos? Răspunsul nu s-a limpezit după Hilbert şi Godel. Acum, tot ce exista era un „joc" formal incomplet, exprimat în limbaj matematic. Cum puteau modele întemeiate pe un sistem atât de „nefiabil" să ducă la o înţelegere profundă a universului şi a felului în care funcţionează? Înainte de a încerca măcar să abordez aceste întrebări, vreau să le precizez puţin examinând câteva cazuri care demonstrează subtilităţile eficacităţii matematicii.

Capitolul 8

Eficacitate imprevizibilă?

În capitolul 1 am văzut că succesul matematicii în teoriile din fizică prezintă două aspecte: pe unul l-am numit „activ", pe celălalt, „pasiv". Latura „activă" reflectă faptul că oamenii de ştiinţă formulează legile naturii în termeni matematici manifest aplicabili – altfel spus, ei folosesc entităţi, relaţii şi ecuaţii matematice care au fost elaborate ţinând cont de o aplicaţie precisă, adesea chiar pentru subiectul în discuţie. În aceste cazuri, cercetătorii se sprijină de regulă pe asemănarea dintre proprietăţile conceptelor matematice şi fenomenele observate sau rezultatele experimentale. Eficacitatea matematicii poate să nu pară chiar atât de surprinzătoare în aceste cazuri, din moment ce se poate spune că teoriile sunt croite

anume pentru a se potrivi cu observaţiile. Există totuşi ceva uimitor în această latură „activă”, care ţine de precizie şi la care vom reveni în acest capitol. Eficacitatea „pasivă” se referă la cazuri în care teorii matematice complet abstracte au fost elaborate fără vreo intenţie de aplicare, pentru ca mai târziu să se transforme în modele fizice cu o mare forţă de predicţie. Teoria nodurilor oferă un exemplu spectaculos de combinaţie între eficacitatea activă şi cea pasivă.

Noduri

Pe seama nodurilor au apărut chiar şi legende. Vă amintiţi poate de legenda greacă a nodului gordian. Un oracol le-a prezis cetăţenilor Frigiei că următorul lor rege va fi primul bărbat care va intra în capitală într-o căruţă trasă de boi. Gordios, un ţăran neprevenit care-şi mâna căruţa spre oraş, a devenit astfel rege. Plin de recunoştinţă, Gordios şi-a închinat căruţa zeilor şi a legat-o de un stâlp cu un nod complicat pe care nimeni nu-l putea dezlega. O profeţie ulterioară a prezis că acela care va desface nodul va deveni regele Asiei. Destinul a vrut ca nodul să fie desfăcut (în anul 333 î.Hr.) de Alexandru Macedon, care a devenit apoi într-adevăr regele Asiei. Soluţia găsită de Alexandru pentru nodul gordian n-a fost una tocmai subtilă sau măcar onestă – se spune că a tăiat nodul cu sabia!

Dar nu trebuie să ne întoarcem până la Grecia antică pentru a întâlni noduri. Un copil legându-şi şireturile, o fată împletindu-şi părul, o bunică tricotând un pulover sau un marinar legându-şi barca la ţărm, toţi folosesc un nod sau altul. Diverselor noduri li s-au dat nume pline de imaginaţie: „nod pescăresc”, „laţul englezului”, „labă de pisică” [gură de ştiucă – nod marinăresc], „nodul iubitului” [nod dublu], „bunicuţa” [nod marinăresc], „nodul spânzuratului”[28]. Nodurile marinăreşti, în special, au fost considerate suficient de importante pentru ca, în Anglia secolului XVII, să fi apărut o serie întreagă de cărţi pe tema lor. Una dintre aceste cărţi a fost scrisă de

28 Pentru plasticitatea termenilor, am dat traducerea literală. (*N.. t.)*

aventurierul englez John Smith (1580 – 1631), cunoscut pentru relaţia lui cu prinţesa amerindiană Pocahontas.

Teoria matematică a nodurilor s-a născut în 1771, printr-un articol al matematicianului francez Alexandre Théophile Vandermonde (1735 – 1796). Vandermonde a fost primul care a înţeles că nodurile pot fi studiate ca parte a *geometriei poziţiei,* care se ocupă cu relaţiile ce depind doar de poziţie, ignorând dimensiunile şi calculul cantităţilor. Următorul care a jucat un rol în teoria nodurilor a fost Carl Friederich Gauss, „prinţul matematicii”. Câteva dintre notele lui Gauss conţin desene şi descrieri detaliate ale nodurilor, împreună cu unele studii analitice ale proprietăţilor acestora. Oricât de importante au fost lucrările lui Vandermonde, Gauss şi ale altor matematicieni din secolul XIX, principalul impuls pentru teoria matematică modernă a nodurilor a venit dintr-o direcţie neaşteptată – încercarea de a explica structura materiei. Ideea s-a născut în mintea faimosului fizician englez William Thomson, mai bine cunoscut acum ca Lord Kelvin (1824 – 1907). Eforturile lui Thomson s-au concentrat pe formularea unei teorii a atomilor, cărămizile constitutive ale materiei. Potrivit ipotezei sale pline de imaginaţie, atomii erau tuburi de eter înnodate – eterul fiind misterioasa substanţă despre care se credea că umple întreg spaţiul. Diversitatea elementelor chimice putea fi explicată, în cadrul acestui model, prin diversitatea nodurilor.

Dacă speculaţia lui Thomson ne pare azi aproape nebunească, asta se întâmplă numai pentru că am avut un secol întreg pentru a ne obişnui cu modelul corect al atomului (şi a-l testa experimental), model în care electronii orbitează în jurul nucleului atomic. Dar Thomson trăia în Anglia anilor 1860 şi era impresionat de stabilitatea inelelor complexe de fum şi de capacitatea lor de a vibra – două proprietăţi considerate la acea vreme esenţiale pentru a sta la baza unui model atomic. Ca să găsească un echivalent al tabelului periodic al elementelor folosind nodurile, Thomson trebuia să le poată clasifica –

să afle ce noduri diferite sunt posibile –, iar această nevoie de clasificare a trezit interesul pentru matematica nodurilor.

După cum am văzut în capitolul 1, un nod matematic arată ca un nod obişnuit de pe o sfoară, dar capetele sforii sunt unite. Cu alte cuvinte, un nod matematic este o curbă închisă, fără capete libere. Câteva exemple sunt prezentate în figura 54, unde nodurile tridimensionale sunt reprezentate prin proiecţiile lor în plan. Poziţia în spaţiu a oricăror două fire care se încrucişează este indicată în figură printr-o linie întreruptă care desemnează firul inferior. Cel mai simplu nod – cel numit *dezlegat* – este pur şi simplu o curbă circulară (figura 54 a). *Nodul treflă* (figura 54 b) are trei încrucişări de fire, *iar nodul în formă de opt* (figura 54 c) are patru încrucişări. În teoria lui Thomson, aceste trei noduri puteau fi, în principiu, modelele a trei atomi de complexitate crescândă, de pildă, hidrogenul, carbonul şi oxigenul. Era însă nevoie de o

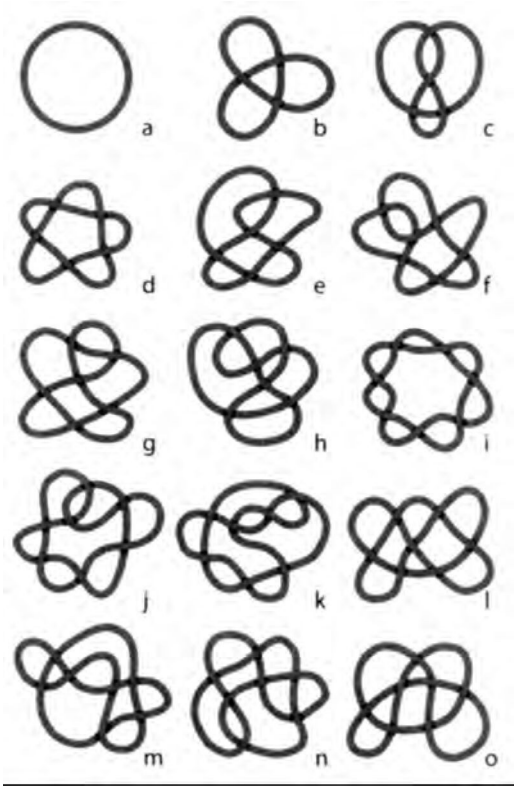


Figura 54 clasificare completă a nodurilor, iar cel care s-a apucat să facă ordine între noduri a fost prietenul lui Thomson, matematicianul scoţian Peter Guthrie Tait (1831 – 1901).

Întrebările pe care matematicienii şi le pun despre noduri nu se deosebesc mult de cele pe care ni le putem pune despre o sfoară obişnuită înnodată sau despre un ghem încâlcit. Este cu adevărat înnodat? Este un nod echivalent cu altul? Sensul acestei din urmă întrebări este: poţi deforma un nod pentru a obţine forma altuia, fără să rupi firele sau să treci firele unele prin altele, ca la inelele chinezeşti legate ale iluzioniştilor? Importanţa acestei întrebări e demonstrată în figura 55, care arată că prin anumite operaţii se pot obţine două reprezentări diferite ale unui acelaşi nod. Scopul teoriei nodurilor este găsirea unui mijloc precis de a demonstra că unele noduri (ca

nodul treflă şi nodul în formă de opt; figurile 54 b şi 54 c) sunt cu adevărat diferite, ignorând în acelaşi timp diferenţele superficiale dintre alte noduri, cum sunt cele două noduri din figura 55.

Tait a ales calea grea în munca sa de clasificare. Fără vreun principiu matematic riguros care să-l călăuzească, a făcut liste de curbe cu o încrucişare, două încrucişări, trei încrucişări etc. În colaborare cu reverendul Thomas Penyngton Kirkman (1806 – 1895), care era şi matematician amator, a început să analizeze curbele pentru a elimina repetiţiile prin noduri echivalente. Sarcina nu era banală. Trebuie să înţelegem că la fiecare încrucişare există două moduri de a alege care fir trece deasupra. Aceasta înseamnă că, dacă o curbă are, să zicem, şapte încrucişări, trebuie considerate 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 128 de noduri. Cu alte cuvinte, viaţa omenească este prea scurtă pentru a încheia în acest mod intuitiv clasificarea curbelor cu zeci de noduri. Munca lui Tait nu a trecut totuşi neobservată. Marele fizician James Clerk Maxwell, cel care

Figura 55

a formulat teoria clasica a electricităţii şi magnetismului, a tratat cu respect teoria atomică lui Thomson, afirmând că „satisface mai multe condiţii decât orice atom considerat până acum”. Conştient fiind de contribuţia lui Tait, Maxwell i-a dedicat următorul catren:

Transformă ghemul de noduri într-o perfectă împletire De bucle şi legături care se întrepătrund.

Până în 1877, Tait clasificase noduri alternante având până la şapte încrucişări. Nodurile alternante sunt cele în care încrucişările trec alternativ pe deasupra şi pe dedesubt, ca într-un covor ţesut. Tait a făcut şi câteva descoperiri mai pragmatice, sub forma unor principii elementare, numite mai apoi conjecturile lui Tait. Aceste conjecturi sunt atât de subtile, încât au rezistat tuturor încercărilor de a fi demonstrate până la sfârşitul anilor 1980. În 1885, Tait a publicat un tabel de noduri cu până la zece încrucişări, şi s-a hotărât să se oprească. În mod

independent, profesorul Charles Newton Little (1858 – 1923) de la Universitatea din Nebraska a publicat şi el (în 1899) tabele de noduri nealternante cu cel mult zece încrucişări.

Tait i-a fost întotdeauna drag Lordului Kelvin. Cu ocazia unei ceremonii la Peterhouse, în Cambridge, unde a fost dezvelit un portret al lui Tait, Lord Kelvin a declarat:

Îmi amintesc că Tait a spus odată că nu merită să trăieşti decât pentru ştiinţă. A spus-o cu toată sinceritatea, dar Tait însuşi a dovedit contrariul. Era un mare cititor. Îi ştia pe dinafară pe Shakespeare, Dickens şi Thackeray. Avea o memorie formidabilă. Dacă citea un lucru care-i plăcea, nu-l mai uita niciodată.

Din păcate, pe când Tait şi Little îşi încheiaseră eroica muncă de clasificare a nodurilor, teoria lui Kelvin era complet infirmată ca posibilă teorie atomică. Preocuparea pentru noduri a continuat totuşi, având un statut de sine stătător, cu deosebirea că „studiul nodurilor a devenit o ramură esoterică a matematicii pure”, după cum spunea matematicianul Michael Atiyah.

Domeniul matematicii în care mărimea, netezimea şi, într-un anume sens, chiar forma, sunt ignorate, se numeşte *topologie.* Topologia – geometria foii de cauciuc – studiază acele proprietăţi care rămân neschimbate atunci când spaţiul e întins sau deformat în orice fel (fără a-l rupe sau a-l găuri). Prin însăşi natura lor, nodurile ţin de topologie. În paranteză fie spus, matematicienii fac distincţia între *noduri,* (bucle înnodate o dată), *multinoduri,* (ansambluri de bucle înnodate, împletite laolaltă), şi *trese* (ansambluri de fire verticale legate de o bară orizontală prin ambele capete).

Dacă nu v-aţi lăsat impresionaţi de dificultatea de a clasifica nodurile, iată un fapt grăitor. Tabelul lui Charles Little, publicat în 1899, după şase ani de muncă, conţinea patruzeci şi trei de noduri nealternante cu zece încrucişări. Acest tabel a fost studiat cu mare atenţie de mulţi matematicieni, şi, timp de şaptezeci şi cinci de ani, s-a crezut că era corect. Apoi, în 1974, avocatul şi

matematicianul newyorkez Kenneth Perko a făcut un experiment cu frânghii pe podeaua salonului său. Spre surpriza sa, a descoperit că două dintre nodurile din tabelul lui Little erau de fapt unul şi acelaşi. Acum credem că există doar patruzeci şi două de noduri nealternante cu zece încrucişări.

Deşi secolul XX a fost martorul unor mari progrese în topologie, teoria nodurilor s-a dezvoltat mai lent. Unul dintre obiectivele matematicienilor era de a identifica proprietăţi care să distingă nodurile între ele. Asemenea proprietăţi se numesc *invarianţi ai nodurilor* – cantităţi pentru care oricare două proiecţii diferite ale aceluiaşi nod dau exact aceeaşi valoare. Cu alte cuvinte, un invariant ideal este ca o „amprentă digitală" a nodului – o proprietate caracteristică ce nu se schimbă prin deformarea nodului. Poate că cel mai simplu invariant la care ne putem gândi este numărul minim de încrucişări într-un desen al nodului. De pildă, oricât ne-am strădui să desfacem nodul în formă de treflă (figura 54 b), nu vom reduce niciodată numărul de încrucişări la mai puţin de trei. Din păcate, există mai multe motive pentru care numărul minim de încrucişări nu e cel mai util invariant. Întâi, aşa cum arată figura 55, nu e întotdeauna uşor de determinat dacă un nod a fost desenat cu numărul minim de încrucişări. În al doilea rând, şi cel mai important, multe noduri diferite au acelaşi număr de încrucişări. În figura 54, de pildă, există trei noduri diferite cu şase încrucişări, şi nu mai puţin de şapte noduri diferite cu şapte încrucişări. Numărul minim de încrucişări nu caracterizează, prin urmare, majoritatea nodurilor. În fine, numărul minim de încrucişări, prin chiar natura lui simplistă, nu spune prea multe despre proprietăţile generale ale nodurilor.

Un progres în teoria nodurilor a fost făcut în 1928, când matematicianul american James Waddell Alexander (1888 – 1971) a descoperit un invariant numit *polinomul Alexander.* Polinomul Alexander este o expresie algebrică ce foloseşte aranjamentul încrucişărilor pentru a

caracteriza nodul. Vestea bună era că, dacă două noduri aveau polinoame Alexander diferite, atunci nodurile erau într-adevăr diferite. Vestea proastă era că două noduri având acelaşi polinom puteau totuşi să fie diferite. Deşi extrem de util, polinomul Alexander nu era încă perfect pentru a deosebi nodurile.

Matematicienii au petrecut următoarele patru decenii studiind baza conceptuală a polinomului Alexander şi pătrunzând mai adânc în înţelegerea proprietăţilor nodurilor. De ce intrau atât de adânc în acest domeniu? Desigur, nu de dragul vreunei aplicaţii practice – modelul atomic al lui Thomson fusese de mult uitat, iar la orizont nu apărea vreo problemă din ştiinţă, economie, arhitectură sau din oricare altă disciplină care să pară a avea nevoie de teoria nodurilor. Matematicienii studiau la nesfârşit nodurile pur şi simplu fiindcă erau curioşi! Pentru ei, ideea de a înţelege nodurile şi principiile care le guvernează era cât se poate de frumoasă. Raza de lumină aruncată de polinomul Alexander era la fel de tentantă pentru matematicieni ca provocarea de a cuceri Everestul pentru George Mallory, care, întrebat de ce voia să escaladeze muntele, a dat faimosul răspuns „Pentru că e acolo”.

La sfârşitul anilor 1960, prolificul matematician anglo-american John Norton Conway a descoperit o metodă de a „deznoda” nodurile treptat, dezvăluind astfel relaţia dintre noduri şi polinoamele Alexander asociate. În particular, Conway a introdus două operaţii „chirurgicale” simple de la care se poate porni pentru a defini un invariant al unui nod. Operaţiile lui Conway, numite *flip* şi *netezire,* sunt prezentate schematic în figura 56. La flip (figura 56 a), încrucişarea e transformată prin trecerea firului superior sub firul inferior (figura arată cum se poate realiza această transformare cu o sfoară). Observaţi că flip schimbă în mod evident natura nodului. De pildă, vă puteţi uşor convinge că nodul în formă de treflă din figura 54 va fi dezlegat (figura 54 a) în urma unui flip. Operaţia de netezire a lui Conway elimina complet încrucişarea (figura 56 b) legând, după tăiere, firele în mod „greşit”. Cu toate

rezultatele obţinute de Conway, matematicienii au rămas convinşi timp de încă aproape două decenii că nu se puteau găsi alţi invarianţi (de tipul polinomului Alexander). Lucrurile s-au schimbat radical în 1984.

Matematicianul american de origine neozeelandeză Vaughan Jones nu se ocupa de noduri, ci de o lume şi mai abstractă – una dintre entităţile matematice numite *algebre von Neumann.* Brusc, Jones a observat că o relaţie care apărea în algebrele von Neumann semăna suspect de mult cu o relaţie din teoria nodurilor, şi s-a întâlnit cu Joan Birman, specialistă în teoria nodurilor de la Universitatea Columbia, pentru a discuta eventuale aplicaţii. Examinarea relaţiei a dezvăluit până la urmă un invariant complet nou pentru noduri, botezat*polinomul Jones.* Polinomul Jones a fost imediat recunoscut drept un invariant mai precis decât polinomul Alexander. El face, de pildă, distincţia între noduri şi imaginile lor în oglindă (de exemplu, nodurile treflă drept şi stâng din figura 57) pentru care polinoamele Alexander sunt identice. În plus, descoperirea lui Jones a generat un entuziasm fără precedent printre specialiştii în teoria nodurilor: anunţul noului invariant a declanşat asemenea frenezie, încât lumea nodurilor semăna brusc cu bursa într-o zi în care Rezerva Federală ar scădea pe neaşteptate dobânzile.

Descoperirea lui Jones însemna mult mai mult decât un simplu progres în teoria nodurilor. Polinomul Jones lega brusc o diverşi

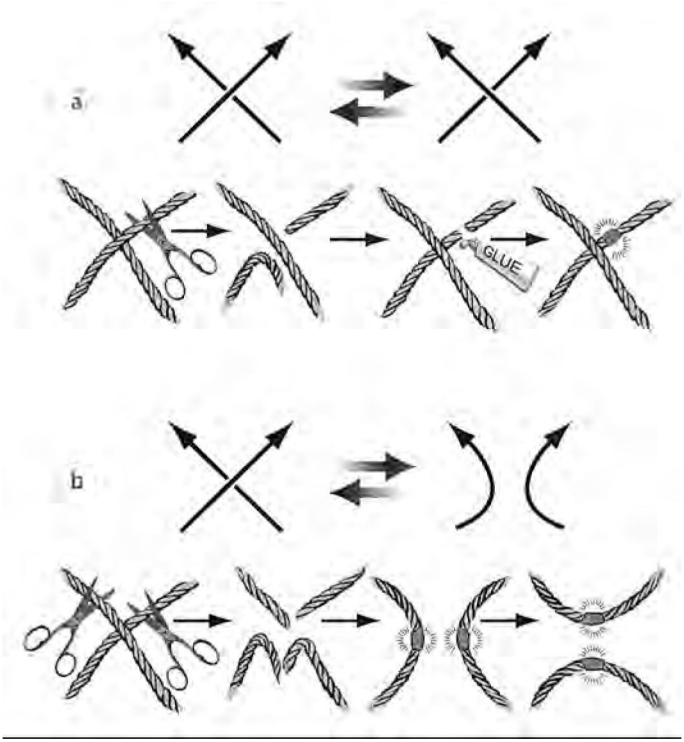


Figura 56

tate formidabilă de domenii din matematică şi fizică, de la mecanica statistică (folosită, de pildă, pentru a studia comportamentul ansamblelor mari de atomi şi molecule) la grupurile cuantice (o ramură a matematicii legată de fizica lumii subatomice). Matematicienii din întreaga lume au început să caute cu febrilitate invarianţi şi mai generali, care să depăşească atât polinomul Alexander, cât şi polinomul Jones. Această cursă matematică s-a încheiat cu pesemne cel mai uimitor rezultat din istoria competiţiilor ştiinţifice. La doar câteva luni după ce Jones şi-a anunţat noul polinom, patru grupuri, lucrând independent şi folosind trei abordări matematice diferite, au anunţat *simultan* descoperirea unui invariant

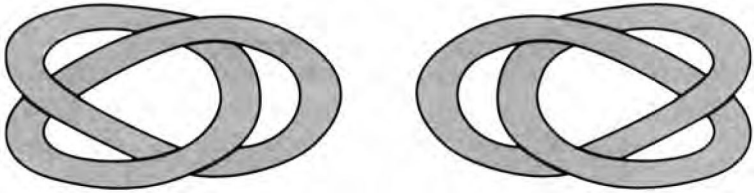


Figura 57

şi mai precis. Noul polinom este acum cunoscut ca *polinomul HOMFLY,* după iniţialele descoperitorilor – Hoste, Ocneanu, Millet, Freyd, Lickorish şi Yetter. Mai mult, ca şi cum patru grupuri trecând linia de sosire împreună nu ar fi de ajuns, doi matematicieni polonezi (Przytycki şi Traczyck) au descoperit independent exact acelaşi polinom, dar nu l-au publicat la timp din pricina capriciilor poştei. În consecinţă, polinomul e numit şi HOMFLYPT (sau uneori THOMFLYP), prin adăugarea iniţialelor descoperitorilor polonezi.

Deşi au fost descoperiţi între timp şi alţi invarianţi ai nodurilor, n-am ajuns încă la clasificarea completă a nodurilor. Întrebarea care anume nod poate fi răsucit şi întors pentru a genera un alt nod, fără a folosi foarfeci, rămâne deocamdată fără răspuns. Invariantul cel mai avansat descoperit până în prezent îi aparţine matematicianului francez de origine rusă Maxim Kontsevich, care a primit în 1998 prestigioasă Medalie Fields, iar în 2008 Premiul Crafford pentru cercetările sale. Tot în 1998, Jim Hosts de la Universitatea Pitzer din Clermont, California, şi Jeffrey Weeks de la Canton, New York, au clasificat toate buclele înnodate cu cel mult şaisprezece încrucişări. O clasificare identică a fost realizată independent de Morwen Thistlewaite de la Universitatea din Tenessee, Knoxville. Fiecare listă conţine exact 1 701 936 de noduri diferite!

Adevărata surpriză nu a venit însă de la rezultatele propriu-zise din teoria nodurilor, ci de la spectaculoasele şi neaşteptatele repercusiuni ale teoriei asupra unui spectru larg de discipline ştiinţifice.

Nodurile vieţii

Să ne amintim că teoria nodurilor a fost stimulată de un model greşit al atomului. Odată mort modelul, matematicienii nu s-au simţit descurajaţi, ci au pornit într-o lungă şi dificilă aventură în încercarea de a înţelege nodurile pentru ele însele. Închipuiţi-vă bucuria care i-a cuprins când teoria nodurilor s-a dovedit brusc esenţială pentru înţelegerea proceselor fundamentale care implică moleculele vieţii. E nevoie de un mai bun exemplu privind rolul „pasiv" al matematicii pure în explicarea naturii?

Acidul dezoxiribonucleic, ADN, este materialul genetic al tuturor celulelor. El constă în două fâşii lungi care sunt împletite şi răsucite una în jurul alteia de milioane de ori pentru a forma o dublă spirală. De-a lungul celor două coloane vertebrale care pot fi considerate cele două laturi ale unei scări, alternează molecule de zahăr şi fosfat. „Fuşteii" scării constau din perechi de baze prinse între ele prin legături de hidrogen într-un mod prestabilit (adenina se leagă numai de timină, iar citozina numai de guanină; figura 58). Atunci când o celulă se divide, primul pas este replicarea ADN-ului, astfel încât celulele-fiice să poată primi copii. În mod asemănător, în procesul de *transcriere* (în care informaţia genetică a ADN-ului e copiată în AM), o secţiune a dublei spirale a ADN-ului este desfăşurată şi numai una dintre şuviţele ADN-ului serveşte drept model. După ce se încheie sinteza ARN-ului, ADN-ul se înfăşoară la loc în spirală. Nici procesul de replicare, nici cel de transcriere nu este totuşi simplu, căci ADN-ul e atât de strâns înnodat şi înfăşurat (pentru a stoca informaţia cât mai compact), încât, dacă nu ar avea loc despachetarea, aceste procese esenţiale pentru viaţă nu s-ar putea desfăşura lin. În plus, pentru ca procesul de replicare să se încheie, moleculele-fiice de ADN trebuie deznodate, iar ADN-ul părinte trebuie să revină în cele din urmă la configuraţia iniţială.

Agenţii care se ocupă de deznodare şi descâlcire sunt enzimele. Enzimele pot face să treacă o şuviţă ADN prin alta creând rupturi temporare şi legând din nou capetele

într-un mod diferit.

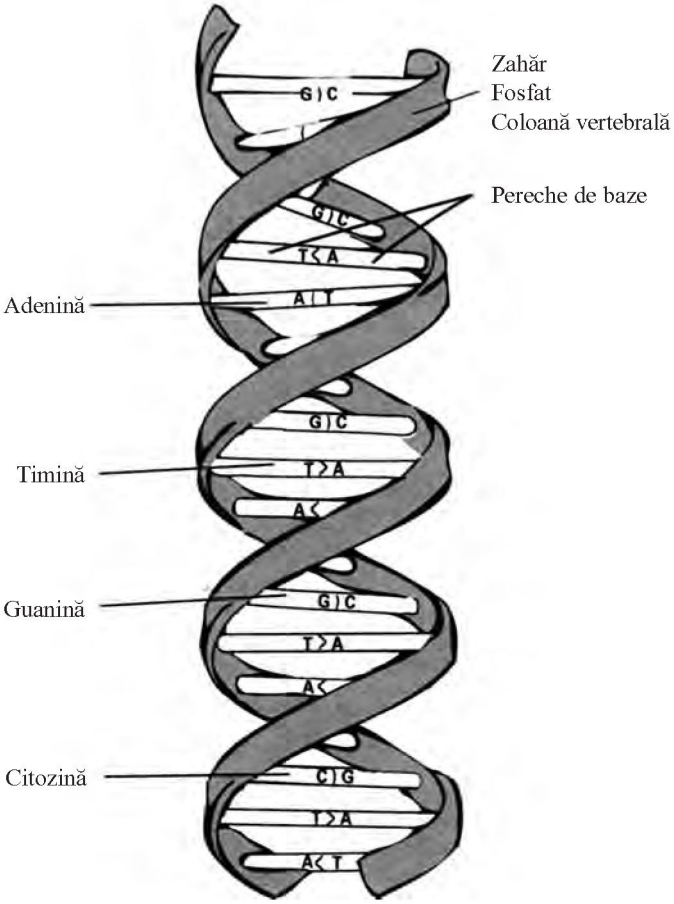


Figura 58

Vi se pare cunoscut acest procedeu? Sunt tocmai operaţiile chirurgicale introduse de Conway pentru desfacerea nodurilor matematice (reprezentate în figura 56). Cu alte cuvinte, din punct de vedere topologic, ADN-ul este un nod complex care trebuie desfăcut de enzime pentru a permite replicarea şi transcrierea. Folosind teoria nodurilor pentru a calcula cât este de greu de deznodat ADN-ul, cercetătorii pot studia proprietăţile enzimelor care efectuează operaţia. Folosind tehnici de vizualizare experimentale precum microscopia electronică şi

electroforeza, oamenii de ştiinţă pot acum observa şi măsura schimbările în înnodarea şi legarea ADN-ului provocate de o enzimă (figura 59 prezintă o micrografie electronică a unui nod ADN). Matematicienii trebuie să răspundă provocării de a deduce apoi mecanismele prin care enzimele operează, pornind de la schimbările observate în topologia ADN-ului. În plus, schimbarea numărului de încrucişări în nodul ADN oferă biologilor o măsură a *vitezelor de reacţie* ale enzimelor – câte încrucişări pe minut pot fi afectate de o enzimă de concentraţie dată.

Dar biologia moleculară nu e singurul domeniu în care teoria nodurilor şi-a găsit aplicaţii neprevăzute. Teoria corzilor – actuala încercare de a formula o teorie unificată care să explice toate forţele din natură – este şi ea preocupată de noduri.

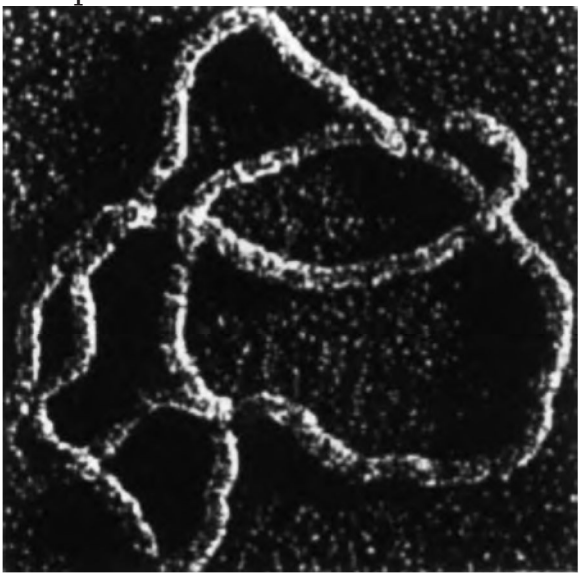


Figura 59

Universul pe o coardă?

Gravitaţia este forţa care acţionează la scara cea mai mare. Ea menţine laolaltă stelele în galaxii şi influenţează expansiunea universului. Relativitatea generală a lui Einstein este o remarcabilă teorie a gravitaţiei. Adânc în

nucleul atomic, domnesc alte forţe şi o altă teorie. Forţele nucleare tari menţin laolaltă particule numite *quarci* pentru a forma protonii şi neutronii, constituenţii elementari ai materiei. Comportamentul particulelor şi forţelor din lumea subatomică e guvernat de legile mecanicii cuantice. Quarcii şi galaxiile ascultă oare de aceleaşi reguli? Fizicienii cred că da, însă nu ştiu încă de ce. Timp de zeci de ani, fizicienii au căutat o „teorie a tot ce există" – o descriere completă a legilor naturii. În particular, ei vor să umple golul dintre mare şi mic printr-o teorie cuantică a gravitaţiei – o reconciliere a relativităţii generale cu mecanica cuantică. Teoria corzilor pare a fi candidatul cel mai promiţător pentru o asemenea teorie a tot ce există. Ea a apărut doar ca o teorie a forţei nucleare, spre a fi apoi abandonată, dar a fost readusă la viaţă în 1974 de fizicienii John Schwarz şi Joel Scherk. Ideea de bază a teoriei corzilor este destul de simplă. Ea spune că particulele elementare subatomice, cum sunt electronii şi quarcii, nu sunt entităţi punctiforme lipsite de structură, ci diferite moduri de vibraţie ale aceleiaşi corzi fundamentale. Potrivit acestor idei, cosmosul e umplut cu bucle minuscule, elastice, ca nişte benzi de cauciuc. La fel cum corzile unei viori produc diverse armonice când sunt ciupite, diferitele vibraţii ale acestor corzi în formă de buclă corespund diferitelor particule de materie. Cu alte cuvinte, lumea este un fel de simfonie.

Cum corzile sunt bucle închise deplasându-se prin spaţiu, pe măsură ce timpul trece, ele mătură suprafeţe (numite *foi de univers)* de formă cilindrică (figura 60). Dacă o coardă emite alte corzi, acest cilindru se despică pentru a forma structuri în forma unei praştii. Când mai multe corzi interacţionează, ele formează o reţea complexă de suprafeţe toroidale unite. Pe când studiau aceste tipuri de structuri topologice complexe, specialiştii în teoria

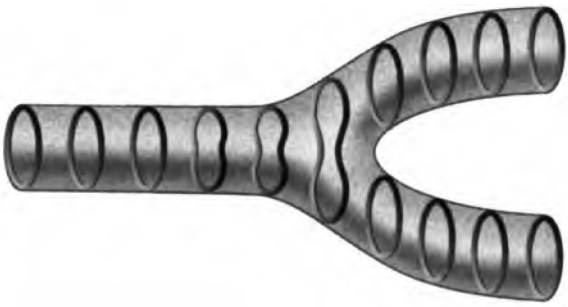


Figura 60

corzilor Hirosi Ooguri şi Cum run Vafa au descoperit o legătură surprinzătoare între numărul suprafeţelor toroidale, proprietăţile geometrice intrinseci ale nodurilor şi polinomul Jones. Încă înainte de asta, Ed Witten – unul dintre protagoniştii teoriei corzilor – a găsit o relaţie neaşteptată între polinomul Jones şi însăşi temelia teoriei corzilor *(teoria cuantică a câmpului).* Modelul lui Witten a fost apoi regândit din perspectivă pur matematică de Michael Atiyah. Astfel, teoria corzilor şi teoria nodurilor trăiesc în perfectă simbioză. Pe de o parte, teoria corzilor a beneficiat de rezultatele din teoria nodurilor; pe de alta, teoria corzilor a condus la o noi descoperiri în teoria nodurilor.

Având o deschidere mult mai largă, teoria corzilor caută explicaţii pentru constituenţii elementari ai materiei cam la fel cum căutase la început Thomson o teorie a atomilor. Thomson crezuse (greşit) că nodurile puteau oferi răspunsul. Printr-o întorsătură surprinzătoare, teoreticienii corzilor cred că nodurile pot într-adevăr oferi măcar câteva dintre răspunsuri.

Povestea teoriei nodurilor demonstrează minunat neaşteptata forţă a matematicii. După cum am arătat mai sus, chiar şi latura „activă” a eficacităţii matematicii de una singură – în care oamenii de ştiinţă creează matematica necesară pentru a descrie ştiinţa observabilă – oferă surprize uimitoare când vine vorba de precizie. Îngăduiţi-mi să prezint pe scurt un subiect din fizică în care au jucat un rol deopotrivă aspectele active şi cele

pasive, dar care e remarcabil mai cu seamă datorită preciziei obţinute.

O precizie decisivă

Newton a luat legile căderii corpurilor descoperite de Galilei şi de alţi experimentatori italieni, le-a combinat cu legile mişcării planetelor determinate de Kepler, şi a folosit această schemă unificată pentru a elabora o lege matematică universală a gravitaţiei. Pe drum, Newton a trebuit să elaboreze o întreagă nouă ramură a matematicii – calculul infinitezimal –, care i-a permis să formuleze concis şi coerent toate proprietăţile legilor pe care le propunea pentru mişcare şi gravitaţie. Precizia cu care Newton şi-a putut verifica legea gravitaţiei, date fiind rezultatele experimentale şi de observaţie din vremea sa, nu a fost mai bună de aproximativ 4 la sută. Cu toate acestea, precizia cu care funcţiona legea a întrecut orice aşteptări. În anii 1950, precizia experimentală era mai bună de unu la zece mii. Dar asta nu e tot. Câteva teorii speculative recente şi-au propus să explice faptul că expansiunea universului nostru pare să se accelereze, sugerând că gravitaţia îşi poate schimba comportamentul la scara distanţelor foarte mici. Să ne amintim că legile lui Newton afirmă că atracţia gravitaţională scade cu inversul pătratului distanţei. Prin urmare, dacă dublăm distanţa dintre două mase, forţa gravitaţională pe care o resimte fiecare masă devine de patru ori mai slabă. Noile scenarii preziceau abateri de la acest comportament pe distanţe mai mici de un milimetru. Eric Adelberger, Daniel Kapner şi colaboratorii lor de la Universitatea din Washington, Seattle, au efectuat o serie de experimente ingenioase pentru a testa schimbarea prezisă a dependenţei în raport cu distanţa. Rezultatele lor cele mai recente, publicate în ianuarie 2007, arată că legea proporţionalităţii cu inversul pătratului distanţei se verifică până la o distanţă egală cu cincizeci şi şase de miimi de milimetru! Astfel, o lege matematică propusă cu mai bine de trei sute de ani în urmă, pe baza unor observaţii foarte sărace, nu numai că s-a dovedit extrem de precisă, dar s-a demonstrat că e

valabilă într-un domeniu de distanţe care nu a putut fi testat până de curând.

Există o întrebare importantă la care Newton nu a răspuns: cum funcţionează gravitaţia? Cum afectează Pământul mişcarea Lunii, de la o distanţă de un sfert de milion de mile? Newton era conştient de acest neajuns al teoriei sale, pe care l-a recunoscut deschis în *Principia:*

Am explicat până acum fenomenele cereşti şi pe cele ale oceanului[29] nostru prin forţa gravitaţiei, dar încă nu am stabilit cauza acestei forţe. Este cert că ea trebuie să-şi aibă originea într-o cauză care pătrunde în chiar centrul Soarelui şi planetelor [...] şi se propagă în toate direcţiile pe distanţe uriaşe, scăzând întotdeauna cu inversul pătratului distanţelor [...]. Dar nu am putut deocamdată descoperi cauza acestor proprietăţi ale gravitaţiei pornind de la fenomene, şi nu avansez nicio ipoteză.

Cel care s-a hotărât să răspundă provocării generate de omisiunea lui Newton a fost Albert Einstein (1879 – 1955). În 1907 Einstein avea un motiv foarte puternic să se oprească asupra gravitaţiei – noua sa teorie a *relativităţii restrânse* părea să intre în contradicţie cu legea newtoniană a gravitaţiei.

Newton credea că acţiunea gravitaţiei e instantanee. El a presupus că planetele resimţeau imediat forţa gravitaţională a Soarelui, iar mărul resimţea imediat atracţia Pământului. Pe de altă parte, relativitatea restrânsă a lui Einstein se baza pe afirmaţia că niciun obiect, energie sau informaţie nu puteau călători mai repede decât lumina. Cum putea fi atunci gravitaţia instantanee? După cum vom vedea în exemplul următor, consecinţele acestei contradicţii puteau fi dezastruoase pentru noţiuni fundamentale cum e percepţia noastră asupra cauzei şi efectului.

Să ne închipuim că, brusc, Soarele ar dispărea. Lipsit de forţa care-l menţine pe orbită, Pământul (potrivit lui Newton) ar începe imediat să se mişte în linie dreaptă (făcând abstracţie de micile abateri provocate de gravitaţia

29 Este vorba de maree. *(N. t.)*

celorlalte planete). Soarele însă ar dispărea din câmpul vizual al pământenilor abia cu opt minute mai târziu, intervalul în care lumina parcurge distanţa de la Soare la Pământ. Cu alte cuvinte, schimbarea în mişcarea Pământului ar preceda dispariţia Soarelui.

Pentru a înlătura această contradicţie şi, în acelaşi timp, pentru a aborda problema nerezolvată a lui Newton, Einstein a pornit în căutarea aproape obsesivă a unei noi teorii a gravitaţiei. Sarcina era colosală: o nouă teorie trebuia nu numai să păstreze toate succesele remarcabile ale teoriei lui Newton, dar şi să explice cum funcţionează gravitaţia, şi s-o facă într-un mod compatibil cu relativitatea restrânsă. După câteva starturi ratate şi rătăciri pe căi greşite, Einstein şi-a atins scopul în 1915. *Teoria generală a relativităţii* este privită şi azi de mulţi drept una dintre cele mai frumoase teorii formulate vreodată.

În centrul descoperirii lui Einstein se află ideea că gravitaţia nu e decât o deformare a structurii spaţiului şi timpului. Potrivit lui Einstein, la fel cum o minge de golf este ghidată de deformările şi curbele unui gazon sinuos, planetele urmează traiectorii curbe într-un spaţiu deformat care reprezintă gravitaţia Soarelui. Cu alte cuvinte, în absenţa materiei sau a altor forme de energie, *spaţiultimp* (unificarea celor trei dimensiuni spaţiale cu timpul) ar fi plat. Materia şi energia deformează spaţiul-timp, aşa cum o bilă grea de popice provoacă o adâncitură într-o foaie elastică. Planetele urmează cele mai directe traiectorii în această geometrie curbă, care este o manifestare a gravitaţiei. Descoperind „cum funcţionează” gravitaţia, Einstein a oferit şi cadrul pentru a răspunde la întrebarea cât de repede se propagă ea. Aceasta se reducea la a afla cât de repede se pot propaga deformările spaţiului-timp, ceea ce seamănă cu a calcula viteza undelor de pe suprafaţa unui lac. Einstein a arătat că, în relativitatea generală, gravitaţia călătoreşte exact cu viteza luminii, ceea ce elimina contradicţia dintre teoria lui Newton şi relativitatea restrânsă. Dacă Soarele ar dispărea,

schimbarea în orbita Pământului s-ar produce opt minute mai târziu, coincizând cu momentul în care noi i-am observa dispariţia.

Faptul că Einstein a pus spaţiul-timp cvadridimensional curbat la baza noii sale teorii privind cosmosul îl făcea să aibă nevoie de o teorie matematică a acestor entităţi geometrice. Disperat, el s-a adresat fostului său coleg de clasă Marcel Grossmann (1878 – 1936): „Am căpătat un mare respect faţă de matematică, ale cărei subtilităţi le consideram înainte doar o extravaganţă". Grossmann i-a arătat că geometria neeuclidiană a lui Riemann (prezentată în capitolul 6) era tocmai instrumentul de care avea Einstein nevoie – o geometrie a spaţiilor curbe în oricâte dimensiuni. Era o formidabilă demonstraţie a ceea ce am numit eficacitatea „pasivă" a matematicii, pe care Einstein a recunoscut-o imediat: „Putem de fapt privi [geometria] ca pe cea mai veche ramură a fizicii", spunea el. „Fără ea n-aş fi putut formula teoria relativităţii".

Relativitatea generală a fost şi ea testată cu o precizie impresionantă. Aceste teste nu sunt uşor de găsit, deoarece curbura spaţiului-timp introdusă de obiecte precum Soarele se măsoară abia în părţi pe milion. Dacă iniţial toate testele erau legate de observaţii din interiorul sistemului solar (de exemplu, mici modificări ale orbitei planetei Mercur, comparate cu predicţiile gravitaţiei newtoniene), acum au devenit posibile teste mai exotice. Unul dintre cele mai precise foloseşte un obiect astronomic numit *pulsar dublu.*

Pulsarul e o stea extrem de compactă care emite unde radio, având o masă ceva mai mare decât masa Soarelui, dar cu o rază de numai aproximativ 10 km. Densitatea unei asemenea stele (numită *stea neutronică)* este atât de mare, încât un centimetru cub de materie cântăreşte aproape un miliard de tone. Multe dintre aceste stele neutronice se rotesc foarte repede în timp ce emit unde radio prin polii lor magnetici. Când axa magnetică e înclinată faţă de axa de rotaţie (ca în figura 61), fasciculul

de unde radio de la unul din polii magnetici poate intersecta direcţia pe care vizăm steaua numai o dată la fiecare rotaţie, ca licărirea unui far. În acest caz, emisia de unde radio va părea că pulsează – de unde numele de „pulsar”. Se poate întâmpla ca doi pulsari să se rotească pe o orbită închisă în jurul centrului comun de gravitaţie, creând un sistem de pulsar dublu.

Există două proprietăţi care fac ca acest pulsar dublu să fie un excelent laborator pentru testarea relativităţii generale: (1) Pulsarii radio sunt ceasornice minunate – perioadele lor de rotaţie sunt atât de stabile, încât depăşesc în precizie orologiile atomice, şi (2) Pulsarii sunt atât de compacţi, încât câmpurile lor gravitaţionale extrem de intense produc efecte relativiste importante. Aceste caracteristici le permit astronomilor să măsoare foarte precis schimbările în timpul de propagare a luminii de la pulsari la Pământ, provocate de mişcarea orbitală a celor doi pulsari.

Figura 61

Cel mai recent test a fost rezultatul unor măsurători de mare precizie efectuate de-a lungul a doi ani şi jumătate asupra sistemului de pulsar dublu PSR J0737 – 3039A/B (lungul „număr de telefon” reflectă coordonatele sistemului pe cer). Cei doi pulsari din acest sistem efectuează o revoluţie orbitală completă în numai două ore şi douăzeci şi şapte de minute, iar sistemul se află la două mii de ani-lumină de Pământ (un an-lumină este distanţa pe care o parcurge lumina în vid în timp de un an, şi reprezintă aproximativ zece bilioane de kilometri). O echipă de astronomi condusă de Michael Kramer de la Universitatea din Manchester a măsurat corecţiile relativiste la mişcarea newtoniană. Rezultatele, publicate în octombrie 2006, au fost în acord cu valorile prevăzute de relativitatea generală, în limita unei erori de 0,05 la sută!

În paranteză fie spus, atât relativitatea restrânsă, cât şi cea generală joacă un rol important în Sistemul de Poziţionare Global (GPS) care ne ajută să găsim poziţia

noastră pe suprafaţa Pământului şi drumul de la un loc la altul, fie că ne deplasăm cu maşina, cu avionul sau pe jos. GPS-ul determină poziţia curentă a receptorului prin măsurarea timpului în care semnalul emis de mai mulţi sateliţi ajunge la el şi prin triangulare, pe baza poziţiilor cunoscute ale fiecărui satelit. Relativitatea specială prezice că orologiile atomice de la bordul sateliţilor ar trebui să ticăie mai încet (rămânând în urmă cu câteva milionimi de secundă pe zi) decât cele de la sol, din cauza mişcării lor relative. În acelaşi timp, relativitatea generală prezice că orologiile sateliţilor ar trebui să ticăie mai rapid (cu câteva zecimi de milionimi de secundă pe zi) decât cele de la sol, din cauza faptului că deasupra Pământului curbura în spaţiul-timp provocată de masa Pământului e mai mică. Fără a efectua corecţiile necesare corespunzând acestor două efecte, erorile în poziţionarea globală s-ar acumula într-un ritm de peste opt kilometri pe zi.

Teoria gravitaţiei este doar unul dintre numeroasele exemple care ilustrează miraculoasa potrivire şi uimitoarea precizie a formulării matematice a legilor naturii. În acest caz, şi în atâtea altele, ce obţinem din ecuaţii e mult mai mult decât am introdus la început în ele. S-a dovedit că precizia teoriilor lui Newton şi Einstein era incomparabil mai mare decât precizia observaţiilor pe care teoriile încercau să le explice iniţial.

Poate că cel mai bun exemplu de precizie uimitoare la care poate ajunge o teorie matematică e dat de *electrodinámica cuantică* (QED), teoria care descrie toate fenomenele ce implică particulele încărcate şi lumina. În 2006, un grup de fizicieni de la Universitatea Harvard a determinat momentul magnetic al electronului (care măsoară tăria interacţiei dintre electron şi un câmp magnetic) cu o precizie de opt părţi la un bilion. Aceasta e în sine o performanţă experimentală formidabilă, dar, dacă ne gândim că cele mai recente calcule teoretice bazate pe QED ating o precizie asemănătoare, iar cele două rezultate sunt în acord, precizia devine aproape neverosimilă. Când a aflat de succesele repetate ale QED, Freeman Dyson,

unul dintre părinţii acesteia, a spus: „Sunt uluit cât de precis dansează Natura după melodia pe care am mâzgălit-o noi atât de neglijent acum cincizeci şi şapte de ani, iar experimentatorii şi teoreticienii pot măsura şi calcula dansul ei până la o parte dintr-un bilion”.

Precizia nu e însă singurul atu al teoriilor matematice – un altul e puterea de predicţie. Îngăduiţi-mi să dau doar două exemple simple, unul din secolul XIX, celălalt din secolul XX, care demonstrează această forţă. Prima teorie prezicea un nou fenomen, a doua – existenţa unui nou tip de particule.

James Clark Maxwell, părintele teoriei clasice a electromagnetismului, a arătat în 1864 că un câmp variabil, electric sau magnetic, ar trebui conform teoriei să genereze unde care se propagă. Aceste unde – undele electromagnetice binecunoscute, de pildă undele radio – au fost detectate pentru prima dată de fizicianul german Heinrich Hertz (1857 – 1894) într-o serie de experimente efectuate la sfârşitul anilor 1880.

La sfârşitul anilor 1960, fizicienii Steven Weinberg, Sheldon Glashow şi Abdus Salam au elaborat o teorie care tratează unitar forţa electromagnetică şi forţa nucleară slabă. Această teorie, numită acum teoria electroslabă, prezicea existenţa a trei particule (bosonii W +, Wei Z) care nu fuseseră niciodată observate. Particulele au fost detectate fără nicio urmă de îndoială în 1983, în experimente efectuate într-un accelerator (în care se ciocnesc particule subatomice la energii foarte înalte) de fizicienii Carlo Rubbia şi Simon van der Meer.

Fizicianul Eugen Wigner, căruia îi aparţine expresia „imprevizibila eficacitate a matematicii”, propunea să numim toate aceste realizări neaşteptate ale teoriilor matematice „legea empirică a epistemologiei” (epistemologia fiind disciplina care studiază sursele şi limitele cunoaşterii). Dacă această „lege” n-ar fi valabilă, susţinea el, oamenilor de ştiinţă le-ar lipsi stimulentul şi încrederea absolut necesare în cercetarea legilor naturii. Wigner nu a dat însă nicio explicaţie pentru legea empirică

a epistemologiei, ci a privit-o ca pe un „dar minunat” pentru care trebuie să fim recunoscători, chiar dacă nu-i înţelegem sursa. Pentru Wigner, acest „dar” surprindea esenţa întrebării privind imprevizibila eficacitate a matematicii.

Ajunşi aici, cred că am strâns suficiente indicii pentru a încerca măcar să răspundem la întrebările cu care am început: de ce e matematica atât de eficientă şi de rodnică în explicarea lumii, încât aduce chiar şi un spor de cunoaştere? Şi, în fond, matematica e inventată sau descoperită?

Capitolul 9
Despre mintea umană, matematică şi univers

Cele două întrebări: (1) Are matematica o existenţă independentă de cea a minţii umane? şi (2) De ce pot fi aplicate conceptele matematice mult dincolo de contextul în care au fost iniţial elaborate? sunt legate în mod subtil. Pentru a simplifica discuţia, voi încerca totuşi să le abordez pe rând.

Vă puteţi, desigur, întreba dacă matematicienii contemporani cred că matematica e descoperire sau invenţie. Iată ce spun Philip Davis şi Reuben Hersh în minunata lor carte *Experienţa matematică*:

Majoritatea celor care au abordat această temă par să fie de acord că matematicianul profesionist tipic este platonician [crede că matematica e descoperire] în timpul săptămânii şi formalist [crede că matematica e invenţie] duminica. Adică atunci când se ocupă cu matematica e convins că are de-a face cu o realitate obiectivă ale cărei proprietăţi încearcă să le determine. Dar apoi, somat să explice filosofic această realitate, îi este mai uşor să pretindă că, la urma urmei, nu crede în ea.

În afară de tentaţia de a înlocui „el” prin „el sau ea” peste tot, pentru a reflecta demografia schimbătoare din matematică, am impresia că această caracterizare

continuă să fie valabilă pentru mulţi matematicieni şi fizicieni teoreticieni de azi. Totuşi, unii matematicieni din secolul XX au luat poziţie fermă de o parte sau de alta.

Iată, reprezentând punctul de vedere platonician, opinia lui G.H. Hardy din *Apologia unui matematician*:

Pentru mine, şi presupun că pentru majoritatea matematicienilor, există o altă realitate, pe care o voi numi „realitate matematică", dar nici matematicienii şi nici filosofii nu pot cădea de acord asupra naturii acestei realităţi matematice. Unii cred că e „mentală" şi că într-un anume sens noi o construim, alţii că e în afara noastră şi independentă de noi.

Ca să explici convingător realitatea matematică ar trebui să fi rezolvat deja foarte multe dintre cele mai dificile probleme ale metafizicii. Dacă ai putea include şi realitatea fizică în această explicaţie, înseamnă că le-ai rezolvat pe toate.

N-ar trebui să discut aceste probleme aici, chiar dacă am căderea s-o fac, totuşi am să-mi exprim dogmatic punctul de vedere, pentru a evita neînţelegeri minore. Cred că realitatea matematică se află în afara noastră, că rostul nostru este s-o descoperim şi s-o *observăm,* iar teoremele pe care le demonstrăm şi pe care le prezentăm grandilocvent drept „creaţiile" noastre sunt pur şi simplu notele pe care le luăm după observaţiile noastre. Această perspectivă a fost susţinută, sub o formă sau alta, de mulţi filosofi celebri de la Platon încoace, iar eu voi folosi limbajul firesc pentru un om care o împărtăşeşte.

Matematicienii Edward Kasner (1878 – 1955) şi James Newman (1907 – 1966) susţin exact părerea opusă, în *Matematică şi imaginaţie:*

Nu e surprinzător că matematica se bucură de un prestigiu neegalat de vreun alt elan al gândirii orientate spre o ţintă.

Ea a făcut cu putinţă atâtea progrese în ştiinţă, e indispensabilă în domeniul practic, şi în acelaşi timp e capodopera purei abstracţiuni, încât recunoaşterea superiorităţii sale printre realizările intelectuale umane e

cât se poate de firească.

În pofida superiorităţii sale, prima preţuire reală a matematicii a avut loc abia recent, cu ocazia apariţiei geometriei neeuclidiene în patru dimensiuni. Nu vrem să spunem prin asta că progresele făcute de calculul infinitezimal, teoria probabilităţilor, aritmetica infinitului, topologia şi alte subiecte despre care am vorbit trebuie minimalizate. Fiecare a lărgit matematica şi a adâncit semnificaţia ei şi a înţelegerii universului fizic. Şi totuşi, niciunul nu a contribuit la introspecţia matematică, la cunoaşterea relaţiilor părţilor matematicii între ele şi cu întregul, în aceeaşi măsură ca ereziile neeuclidiene.

Ca rezultat al spiritului critic curajos adus de aceste erezii, am depăşit ideea că adevărurile matematice au o existenţă independentă şi aparte faţă de mintea noastră. E chiar ciudat că o asemenea idee a putut exista vreodată. Şi totuşi, asta credeau Pitagora şi Descartes, împreună cu sute de alţi mari matematicieni, înainte de secolul XIX. Astăzi matematica s-a dezlegat, şi-a azvârlit lanţurile. Oricare i-ar fi esenţa, ne dăm seama că e la fel de liberă ca spiritul, la fel de neînfrânată ca imaginaţia. Geometria neeuclidiană este dovada că matematica, spre deosebire de muzica sferelor, e creată de mâna omului, supusă doar limitărilor impuse de legile gândirii.

Astfel, contrar preciziei şi certitudinii specifice matematicii, avem de-a face aici cu o diversitate de opinii caracteristică mai curând dezbaterilor filosofice sau politice. Ar trebui oare să fim surprinşi? Nu tocmai. Întrebarea dacă matematica e inventată sau descoperită nu e, de fapt, o problemă de matematică.

Ideea de „descoperire” implică preexistenţa într-un anumit univers, fie el real sau metafizic. Noţiunea de „invenţie” implică mintea omenească, fie în chip individual, fie în chip colectiv. Problema ţine deci de o combinaţie de discipline care pot implica fizica, filosofia, matematica, ştiinţele cognitive, chiar şi antropologia, dar cu certitudine nu ţine exclusiv de matematică. Prin urmare, poate că matematicienii nici măcar nu sunt cei mai în măsură să

răspundă la această întrebare. La urma urmelor, poeţii care pot face minuni cu limbajul nu sunt neapărat cei mai buni lingvişti, iar cei mai mari filosofi nu sunt în general experţi în funcţionarea creierului. Răspunsul la întrebarea „inventată sau descoperită” ar putea fi găsit doar cercetând cu atenţie numeroase indicii provenind dintr-o gamă largă de domenii.

Metafizica, fizica şi cunoaşterea

Cei care cred că matematica există într-un univers independent de noi se împart în două tabere atunci când se pune problema naturii acestui univers; „adevăraţii” platonicieni, pentru care matematica sălăşluieşte în lumea abstractă şi eternă a formelor matematice, şi aceia pentru care structurile matematice constituie de fapt o parte reală a lumii naturale. Am vorbit deja despre platonismul pur şi despre unele dintre neajunsurile sale filosofice, aşa încât daţi-mi voie să mă opresc asupra celei de-a doua perspective.

Cel care a adoptat versiunea extremă şi radical speculativă a scenariului „matematica – parte a lumii fizice” este Max Tegmark, un coleg astrofizician de la Institutul Tehnologic din Massachusetts.

Tegmark susţine că „universul nostru nu e doar descris de matematică – el *este* matematică” [s. m.]. Raţionamentul său porneşte de la presupunerea greu de contrazis că există o realitate fizică externă independentă de oameni. El trece apoi la examinarea naturii a ceea ce ar putea fi teoria ultimă a unei asemenea realităţi (numită de fizicieni „teoria a tot ce există”). Cum lumea fizică este complet independentă de oameni, spune Tegmark, descrierea ei trebuie să fie complet eliberată de orice „bagaj” uman (de pildă, limbajul). Cu alte cuvinte, teoria ultimă nu poate conţine noţiuni de tipul „particule subatomice”, „corzi vibrante”, „spaţiu-timp curbat” sau alte constructe create de oameni. De aici, Tegmark trage concluzia că singura descriere posibilă a cosmosului este una care implică doar noţiuni abstracte şi relaţiile dintre ele – ceea ce reprezintă pentru el tocmai definiţia

matematicii.

Argumentul lui Tegmark în favoarea unei realităţi matematice e fără îndoială interesant şi, dacă ar fi valabil, ne-ar apropia mult de lămurirea problemei „eficacităţii imprevizibile a matematicii”. Într-un univers *identificat* drept matematică, faptul că matematica se potriveşte naturii ca o mănuşă nu e în niciun caz o surpriză. Din păcate, raţionamentul lui Tegmark nu mi se pare foarte convingător. Saltul de la existenţa unei realităţi externe (independentă de oameni) la concluzia că „trebuie să credem în ceea ce eu numesc ipoteza universului matematic: aceea că realitatea noastră fizică e o structură matematică” implică, după părerea mea, o scamatorie. Când Tegmark încearcă să definească matematica, el spune: „Pentru un logician modern, o structură matematică este exact asta: un set de entităţi abstracte şi relaţiile dintre ele”. Dar acest logician modern este un om! Cu alte cuvinte, Tegmark nu *demonstrează* niciodată cu adevărat că matematica nu e inventată de oameni, ci doar presupune acest lucru. Mai mult, după cum remarca neurobiologul francez Jean-Pierre Changeux ca răspuns la o afirmaţie asemănătoare: „Cred că a pretinde că obiectele matematice au realitate fizică, la nivelul fenomenelor naturale pe care le studiem în biologie, pune o dificilă problemă epistemologică. Cum poate o stare fizică, dinăuntrul creierului, să reprezinte o altă stare fizică din afara sa?”

Majoritatea celorlalte încercări de a plasa obiectele matematice direct în realitatea fizică exterioară se bazează pur şi simplu pe dovada eficacităţii matematicii în explicarea naturii. Aceasta presupune însă că nu e posibilă nicio altă explicaţie pentru eficacitatea matematicii, ceea ce, după cum vom vedea, nu este adevărat.

Dacă matematica nu sălăşluieşte nici în lumea platoniciană atemporală şi aspaţială, nici în lumea fizică, înseamnă oare că matematica e în întregime inventată de oameni? Nicidecum. De fapt, voi arăta în următoarea secţiune că cea mai mare parte a matematicii constă în

descoperiri. Înainte de a merge mai departe, ar fi însă util să examinăm câteva opinii ale specialiştilor contemporani în ştiinţele cognitive. Motivul e simplu – chiar dacă matematica ar fi în întregime descoperită, aceste descoperiri sunt făcute totuşi de oameni (matematicieni) care îşi folosesc creierele.

Odată cu imensul progres în ştiinţele cognitive din ultimii ani, era firesc să ne aşteptăm ca neurobiologii şi psihologii să-şi îndrepte atenţia spre matematică, în particular spre cercetarea bazelor matematicii în cogniţia umană. O privire rapidă asupra concluziilor majorităţii specialiştilor în ştiinţele cognitive ne aduce în minte un aforism al lui Mark Twain: „Pentru un om cu un ciocan, totul arată ca un cui". Cu mici diferenţe de accent, toţi neurobiologii şi psihologii consideră matematica o invenţie omenească. La o cercetare mai atentă vom descoperi însă că, deşi interpretarea datelor cognitive e departe de a fi ferită de ambiguităţi, nu încape îndoială că eforturile cognitive reprezintă o etapă nouă şi inovatoare în căutarea fundamentelor matematicii. Iată câteva observaţii făcute de cognitivişti.

În cartea sa din 1997 *Simţul numerelor,* Stanislas Dehaene, specializat în cogniţia numerică, conchide că „intuiţia privind numerele este adânc înrădăcinată în creierele noastre". Această perspectivă se apropie de cea a intuiţioniştilor care au vrut să întemeieze întreaga matematică pe forma pură a intuiţiei numerelor naturale. Dehaene susţine că descoperirile legate de psihologia aritmeticii confirmă că „numărul face parte dintre «obiectele naturale ale gândirii», categoriile înnăscute pe baza cărora percepem lumea". După un alt studiu efectuat asupra unui grup izolat de indigeni din Amazonia, Munduruku, Dehaene şi colaboratorii săi au revenit în 2006 cu o judecată asemănătoare privind geometria: „Înţelegerea spontană a conceptelor şi reprezentărilor geometrice de către această comunitate izolată dovedeşte că, la fel ca aritmetica elementară, nucleul cunoaşterii geometrice e o componentă universală a minţii umane".

Nu toţi cognitiviştii sunt de acord cu aceste concluzii. Unii arată, de pildă, că reuşita membrilor grupului Munduruku în recentul studiu geometric, în care au trebuit să identifice o curbă printre linii drepte, un dreptunghi printre pătrate, o elipsă printre cercuri etc., se poate explica mai curând prin capacitatea lor vizuală de a discerne o formă diferită, decât printr-o cunoaştere geometrică înnăscută.

Jean-Pierre Changeux, neurobiolog francez angajat într-un fascinant dialog despre natura matematicii cu matematicianul (de „convingere" platonicianã) Alain Connes în *Conversaţii despre minte, materie şi matematică*[30], face următoarea observaţie:

Motivul pentru care obiectele matematice nu au nimic de-a face cu lumea simţurilor se leagă […] de caracterul lor generator, de capacitatea lor de a da naştere altor obiecte. Ideea care trebuie subliniată aici este că există în creier ceva ce poate fi numit „compartiment conştient", un fel de spaţiu fizic pentru simularea şi crearea de noi obiecte. […] În anumite privinţe, aceste obiecte matematice noi sunt ca fiinţele vii: aidoma lor, ele sunt obiecte fizice care pot evolua rapid; spre deosebire de fiinţele vii, cu excepţia viruşilor, ele evoluează în creierul nostru.

În fine, cea mai categorică opinie în dilema invenţie-descoperire e formulată de lingvistul cognitivist George Lakoff şi de psihologul Rafael Núñez în oarecum controversata lor carte *De unde provine matematica.* După cum am arătat deja în capitolul 1, aceştia afirmă:

Matematica este o parte naturală a fiinţei umane. Ea apare din trupurile, creierele şi experienţele noastre zilnice în lumea înconjurătoare. [Lakoff şi Núñez spun deci că matematica se naşte dintr-o „minte întrupată".] […] Matematica e un sistem de concepte umane care folosesc din plin instrumentele obişnuite ale cogniţiei umane […]. Oamenii au fost răspunzători pentru crearea matematicii şi

30 Mario Livio citează traducerea în engleză *(Conversations on Mind, Matter, and Mathematics)* a cărţii, apărută initial în Franţa, *Matière à pensée. (N. t.)*

rămânem răspunzători pentru păstrarea şi extinderea ei. Portretul matematicii are chip uman.

Cognitiviştii îşi întemeiază concluziile pe ceea ce consideră ei a fi un ansamblu de dovezi convingătoare rezultând din numeroase experimente. Unele dintre aceste teste implică studii de imagistică funcţională a creierului în timpul efectuării unor sarcini matematice. Altele examinează competenţa matematică a bebeluşilor, a grupurilor de vânători-culegători neinstruiţi, de tipul Munduruku, şi a persoanelor cu diverse grade de vătămare a creierului. Majoritatea cercetătorilor sunt de acord că anumite capacităţi matematice par să fie înnăscute. De pildă, toţi oamenii pot spune dintr-o ochire dacă au în faţă unul, două sau trei obiecte (capacitate numită *subitizare*)[31]. O versiune foarte simplificată a aritmeticii – sub forma grupării, împerecherii, a unor adunări şi scăderi extrem de simple – poate fi şi ea înnăscută, aşa cum poate fi şi o înţelegere elementară a noţiunilor din geometrie (deşi această afirmaţie e mai controversată). Neurologii au identificat de asemenea regiuni ale creierului, precum girusul unghiular din emisfera stângă, care par să fie esenţiale pentru jonglarea cu numerele şi calculele matematice, dar nu şi pentru limbaj şi memoria de lucru.

Potrivit lui Lakoff şi Núñez, un important instrument pentru a trece dincolo de aceste capacităţi înnăscute este construcţia *metaforelor conceptuale* – procese ale gândirii care traduc concepte abstracte în unele mai concrete. De exemplu, înţelegerea aritmeticii se întemeiază pe metafora cât se poate de simplă a colecţiei de obiecte. Pe de altă parte, mai abstracta algebră booleană a mulţimilor se leagă metaforic de mulţimile de numere. Scenariul complex elaborat de Lakoff şi Núñez oferă perspective interesante asupra motivelor pentru care oamenii găsesc unele concepte matematice mult mai dificile decât altele. Alţi cercetători, între care neurologul Rosemary Varley de

---

31 Termenul englezesc *subitizing,* creat de psihologi, desemnează capacitatea instantanee (subită) de a vedea câte obiecte sunt într-un grup puţin numeros. *(N. t.)*

la Universitatea din Sheffield, cred că cel puţin unele dintre structurile matematice parazitează facultatea limbajului – perspicacitatea matematică se dezvoltă împrumutând instrumente folosite la construirea limbajului.

Contrar platonicienilor, cognitiviştii cred cu tărie în asocierea matematicii noastre cu mintea umană. Totuşi, argumentul care mi se pare cel mai puternic împotriva platonismului nu a fost adus de neurobiologi, ci de Sir Michael Atiyah, unul dintre marii matematicieni ai secolului XX. În capitolul 1 am menţionat pe scurt ideile sale, acum e momentul să le prezint mai în detaliu.

Dacă ar trebui să alegeţi un concept din matematica noastră care să aibă cea mai mare probabilitate să existe independent de mintea umană, pe care l-aţi alege? Cei mai mulţi ar alege pesemne numerele naturale. Ce poate fi mai „natural" decât 1, 2, 3…? Până şi Leopold Kronecker (1823 – 1891), matematicianul german cu înclinaţii intuiţioniste, a făcut celebra afirmaţie: „Dumnezeu a creat numerele naturale, tot restul e opera omului". Astfel, dacă s-ar putea dovedi că şi conceptul de număr natural îşi are obârşia în mintea umană, am avea un argument puternic în favoarea paradigmei „invenţiei". Să ne întoarcem la Atiyah: „Dar să ne închipuim că inteligenţa ar aparţine nu rasei umane, ci unei uriaşe meduze solitare şi izolate din adâncurile Oceanului Pacific. Ea nu ar avea experienţa obiectelor individuale, ci doar a apei înconjurătoare. Mişcarea, temperatura şi presiunea i-ar furniza datele senzoriale de bază. Într-un asemenea continuu pur, lumea discretă nu s-ar ivi şi nu ar fi nimic de numărat". Cu alte cuvinte, Atiyah e convins că până şi un concept elementar cum e cel de număr natural a fost *creat* de om, prin abstractizarea (cognitiviştii ar spune „prin metafore întemeietoare") elementelor din lumea fizică. Altfel spus, numărul 12, de pildă, reprezintă o abstractizare a proprietăţii comune a tuturor lucrurilor care apar în duzini, la fel cum cuvântul „gânduri" reprezintă o diversitate de procese care se petrec în creierul nostru.

Cititorul ar putea obiecta la folosirea universului ipotetic al meduzei în demonstrarea acestei idei. El ar putea spune că nu există decât un singur univers, inevitabil, şi că fiecare presupunere trebuie cercetată în contextul acestui univers. Şi totuşi, asta ar reveni la a accepta că, de fapt, conceptul de număr natural depinde cumva de universul experienţei umane! Remarcaţi că este exact ceea ce Lagoff şi Núñez voiau să spună când vorbeau despre matematica „întrupată".

Conceptele matematicii pe care o cunoaştem îşi au prin urmare obârşia în mintea umană. Vă puteţi întreba atunci de ce am insistat mai devreme că cea mai mare parte a matematicii este de fapt descoperită, perspectivă apropiată de cea a platonicienilor.

Invenţie şi descoperire

În limbajul de zi cu zi, distincţia dintre descoperire şi invenţie are uneori limpezimea cristalului, alteori e ceva mai vagă. Nimeni n-ar spune că Shakespeare l-a descoperit pe Hamlet sau că Madame Curie a inventat radiumul. În acelaşi timp, noi medicamente pentru anumite tipuri de boli sunt de obicei anunţate ca descoperiri, chiar dacă presupun adesea sinteza meticuloasă a unor noi compuşi chimici. Aş vrea să prezint mai amănunţit un exemplu concret din matematică, pentru a lămuri distincţia dintre descoperire şi invenţie, dar şi pentru a vedea mai bine procesele prin care matematica evoluează şi progresează.

În cartea VI a *Elementelor* lui Euclid, găsim definiţia pentru o anumită împărţire a unei drepte în două părţi inegale (o altă definiţie, în termeni de suprafeţe, apare în cartea a II-a). Potrivit lui Euclid, dacă o dreaptă *AB* e împărţită de un punct *C* (figura 62) astfel încât raportul dintre lungimile celor două segmente *(AC/CB)* este egal cu raportul dintre lungimea întregii drepte şi lungimea segmentului mai lung (AB/AC), atunci spunem că linia a fost împărţită în „raport extrem şi mediu". Din secolul XIX, acest raport e cunoscut îndeobşte ca secţiunea de aur. Folosind o algebră elementară, se poate dovedi că secţiunea de aur este egală cu

$(1 + \sqrt{5}) / 2 = 1,6180339887\ldots$

Prima întrebare pe care o puteţi pune este de ce a vrut Euclid să definească această împărţire particulară a dreptei şi să dea un nume raportului? La urma urmelor, există o infinitate de moduri în care poate fi împărţită o dreaptă. Răspunsul la această întrebare poate fi găsit în tradiţia mistică şi culturală provenind de la pitagoricieni şi de la Platon. Amintiţi-vă că pitagoricienii erau obsedaţi de numere. Ei credeau că numerele impare erau masculine şi bune, iar numerele pare feminine şi rele. Aveau o slăbiciune aparte pentru numărul 5, uniunea dintre 2 şi 3, primul număr par (feminin) şi primul număr impar (masculin). (1 nu era considerat număr, ci sursa tuturor numerelor.) Pentru pitagoricieni, deci, numărul 5 întruchipa dragostea şi căsnicia, iar ei foloseau pentagrama – steaua cu cinci colţuri (figura 63) – ca simbol al frăţiei lor. Aici îşi face apariţia pentru prima oară secţiunea de aur. Dacă luăm o pentagramă regulată, raportul dintre latura oricărui triunghi şi baza sa *(a/b* în figura 63) este egal cu secţiunea de aur. În mod asemănător, raportul dintre oricare diagonală a pentagonului regulat şi latura sa *(e/*din figura 64) este de asemenea egal cu secţiunea de aur. De fapt, pentru a construi un pentagon cu rigla şi compasul (metoda obişnuită de construcţie geometrică a vechilor greci) e nevoie de împărţirea unei drepte în secţiunea de aur.

Platon a adăugat încă o dimensiune semnificaţiei mitice a secţiunii de aur. Grecii credeau că totul în univers e alcătuit din patru elemente: pământ, foc, aer şi apă. În *Timaios,* Platon a încercat să explice structura materiei folosind cele cinci corpuri regulate care îi poartă acum numele (figura 65). Aceste poliedre convexe – tetraedrul, cubul, octaedrul, dodecaedrul şi icosaedrul – sunt singurele în care toate feţele (ale fiecărui corp) sunt identice şi sunt poligoane regulate, iar toate vârfurile sunt aşezate pe suprafaţa unei sfere. Platon a asociat patru din cele cinci corpuri platoniciene cu cele patru elemente cosmice fundamentale. De pildă, pământul a fost asociat

cu stabilul cub, penetrantul foc cu ascuţitul

	1	**1**
1	**1**	**1**
A	**C**	**B**

Figura 62

tetraedru, aerul cu octaedrul, iar apa cu icosaedrul. În ce priveşte dodecaedrul (figura 65 d), Platon spune în *Timaios*: „Dar mai rămânea o ultimă combinaţie, a cincea. De ea s-a folosit zeul pentru alcătuirea întregului, desenând structura acestuia din dodecaedre.”[32] Astfel, dodecaedrul reprezenta universul ca întreg. Observaţi însă că dodecaedrul, cu cele douăsprezece suprafeţe ale sale pentagonale, are pretutindeni secţiunea de aur înscrisă în el. Atât volumul, cât şi aria suprafeţei sale pot fi exprimate simplu în funcţie de secţiunea de aur (acelaşi lucru e valabil şi pentru icosaedru).

Istoria arată deci că, prin numeroase încercări succesive, pitagoricienii şi discipolii lor *au descoperit* căi de a construi anumite figuri geometrice care, pentru ei, reprezentau concepte importante precum dragostea şi întregul cosmos. Nu e de mirare că ei şi Euclid (care a studiat această tradiţie) *au inventat noţiunea* de secţiune de aur, care era implicată în aceste construcţii, şi i-au dat un nume.

Spre deosebire de orice alt raport arbitrar, numărul 1, 618 s-a aflat în centrul a numeroase şi intense studii, şi continuă să apară chiar şi azi în cele mai neaşteptate locuri. De pildă, la două mii de ani după Euclid, astronomul german Johannes Kepler *a descoperit*

32 *Timaios* (în Platon, *Opere VII,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1993). (N. t.)

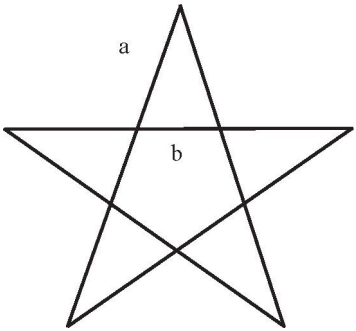


Figura 63

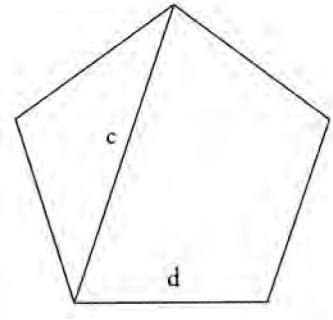


Figura 64

că acest număr apare, în chip miraculos, în legătură cu o serie de numere cunoscute drept *şirul lui Fibonacci.* Şirul lui Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...) are proprietatea că, începând cu al treilea termen, fiecare număr e suma celor două numere anterioare (de exemplu: 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3 etc.). Dacă împărţim fiecare termen al şirului la termenul imediat precedent (de pildă 144 – 89; 233 – 144.), găsim că rapoartele oscilează, dar se apropie tot mai mult de secţiunea de aur, pe măsură ce înaintăm în şir. Rotunjind la a şasea zecimală, obţinem de exemplu: 144 – 89 = 1, 617978; 233 – ’144 = 1, 618056; 377 – 233 = 1, 618026 etc.

Mai aproape de noi, în epoca modernă, şirul lui Fibonacci şi, prin urmare, şi secţiunea de aur şi-au făcut apariţia în ordinea în care sunt aranjate frunzele pe tulpina

unei plante (fenomen numit *filotaxie)* şi în structura cristalelor anumitor aliaje pe bază de aluminiu.

De ce cred că definiţia dată de Euclid noţiunii de secţiune de aur este o invenţie? Pentru că actul inventiv al lui Euclid a pus în evidenţă acest raport şi a atras atenţia matematicienilor asupra lui. Pe de altă parte, în China, unde noţiunea de secţiune de aur nu fusese inventată, literatura matematică nu conţine practic nicio referire la aceasta. În India, unde, iarăşi, noţiunea nu fusese inventată, apar în trigonometrie doar câteva teoreme nesemnificative care implică vag acest raport.

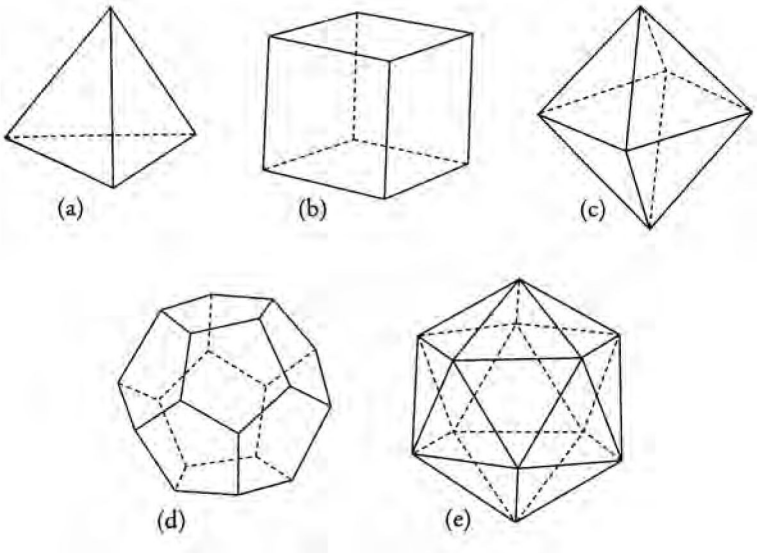


Figura 65

Există multe alte exemple care demonstrează că întrebarea „Matematica este descoperire sau invenţie?" e prost pusă. *Matematica noastră este o combinaţie de invenţii şi descoperiri.* Axiomele geometriei euclidiene, în calitate de *concept*, sunt o invenţie, la fel ca regulile jocului de şah. Axiomelor li s-au adăugat o mulţime de concepte inventate: triunghiuri, paralelograme, elipse, secţiunea de aur etc. Pe de altă parte, teoremele geometriei euclidiene au fost descoperiri; ele sunt căile ce leagă diferitele concepte. În unele cazuri, demonstraţiile

au generat teoreme – matematicienii au studiat ce puteau demonstra, iar de aici au dedus teoremele. În altele, după cum arată Arhimede în *Metoda* sa, mai întâi au găsit răspunsul la o problemă particulară care îi interesa, apoi au elaborat demonstraţia.

Conceptele sunt esenţialmente invenţii. Numerele prime, în calitate de *concept*, sunt o invenţie, dar toate teoremele legate de numerele prime sunt descoperiri. Vechii matematicieni din Babilon.

Egipt şi China n-au inventat conceptul de număr prim, în pofida matematicii lor avansate. Pe de altă parte, putem spune că ei n-au „descoperit" numerele prime? Nu mai mult decât putem spune că Marea Britanie n-a „descoperit" o constituţie codificată ca un document unic. Aşa cum o ţară poate supravieţui fără o constituţie, o matematică se poate dezvolta fără conceptul de număr prim. Şi s-a dezvoltat!

Ştim oare de ce grecii au inventat concepte precum axiomele şi numerele prime? Nu cu certitudine, dar putem bănui că aceasta ţinea de încercarea lor de a ajunge la constituenţii fundamentali ai universului. Numerele prime erau cărămizile de bază ale numerelor, la fel cum atomii erau cărămizile materiei, iar axiomele erau fântâna din care se presupunea că aveau să curgă toate adevărurile geometrice. Dodecaedrul reprezenta întregul cosmos, iar secţiunea de aur era conceptul care a adus la viaţă acest simbol.

Această discuţie subliniază un alt aspect interesant al matematicii – ea aparţine culturii umane. Odată ce grecii au inventat metoda axiomatică, toată matematica europeană ulterioară a urmat-o întocmai şi a adoptat aceeaşi filosofie şi aceleaşi metode. Antropologul Leslie A. White (1900 – 1975) a încercat odată să rezume această latură culturală observând: „Dacă Newton ar fi fost crescut în cultura hotentotă [trib din Africa de Sud], ar fi calculat ca un hotentot". Această dimensiune culturală a matematicii este pesemne răspunzătoare de faptul că multe descoperiri matematice (de exemplu, invarianţii

nodurilor) şi chiar şi unele invenţii importante (de exemplu, calculul infinitezimal) au fost făcute simultan de diferiţi oameni care lucrau independent.

Vorbiţi matematica?

Într-o secţiune precedentă, am comparat semnificaţia conceptului abstract de număr cu cea a sensului unui cuvânt. Este atunci matematica un fel de limbaj? Rezultate obţinute în logica matematică, pe de o parte, şi în lingvistică, pe de alta, arată că, până la un punct, matematica este un limbaj. Cercetările lui Boole, Frege, Peano, Russell, Whitehead, Godel şi ale urmaşilor lor moderni (în special în domenii precum sintaxa filosofică şi semantica, şi în paralel în lingvistică) au demonstrat că gramatica şi raţionamentul sunt strâns legate de o algebră a logicii simbolice. De ce există însă peste 6.500 de limbi, dar o singură matematică? Adevărul este că toate limbile au în comun mai multe caracteristici. De pildă, lingvistul american Charles F. Hockett (1916 – 2000) a atras atenţia prin anii 1960 asupra faptului că toate limbile deţin mijloace pentru a crea noi cuvinte şi sintagme (de pildă, „home page", „laptop", „indie flick"). De asemenea, toate limbile umane permit abstracţiunea („suprarealism", „absenţă", „măreţie"), negaţia („nu", „n-a") şi frazele condiţionale („Dacă bunica ar avea roţi, ar fi autobuz"). Poate că două dintre cele mai importante caracteristici ale tuturor limbilor sunt *nelimitarea* şi *independenţa faţă de stimul*. Prima proprietate reprezintă capacitatea de a crea formulări nemaiauzite şi de a le înţelege. De pildă, pot genera o propoziţie de tipul: „Nu poţi repara barajul Hoover cu gumă de mestecat" şi, chiar dacă n-aţi întâlnit-o înainte, nu vă e greu s-o înţelegeţi. Independenţa faţă de stimul e capacitatea de a alege cum răspundem la un stimul, sau dacă trebuie s-o facem. De pildă, răspunsul la întrebarea pusă de cântăreaţa/compozitoarea Carole King în cântecul său „Ai să mă iubeşti şi mâine?" poate fi oricare dintre următoarele: „Nu ştiu dacă voi mai fi în viaţă mâine"; „Absolut"; „Nu te iubesc nici azi"; „Nu atât de mult cât îmi iubesc câinele"; „Ăsta e de departe cel mai

bun cântec al tău" sau chiar „Mă întreb cine va câştiga Open-ul australian anul ăsta". Veţi recunoaşte că multe dintre aceste trăsături (de pildă, abstractizare, negaţie, nelimitare şi capacitatea de a evolua) sunt caracteristice şi matematicii.

După cum am văzut mai sus, Lakoff şi Núñez au subliniat rolul metaforei în matematică. Specialiştii în lingvistică cognitivă susţin şi ei că toate limbajele umane folosesc metafore pentru a exprima aproape totul. Mai mult, din 1957 (anul în care lingvistul Noam Chomsky şi-a publicat celebrele sale *Structuri sintactice),* multe studii lingvistice au gravitat în jurul conceptului de *gramatică universală* – principii care guvernează toate limbile. Cu alte cuvinte, ceea ce pare a fi un Turn Babel al diversităţii ar putea ascunde în realitate o surprinzătoare asemănare structurală. De fapt, dacă lucrurile n-ar sta aşa, dicţionarele care traduc dintr-o limbă în alta n-ar putea funcţiona.

Vă puteţi încă întreba de ce matematica e atât de uniformă în ce priveşte conţinutul şi notaţia simbolică. Mai cu seamă prima parte a întrebării e contrariantă. Majoritatea matematicienilor sunt de acord că matematica, aşa cum o cunoaştem noi, s-a dezvoltat din ramurile elementare ale geometriei şi aritmeticii practicate de vechii babilonieni, egipteni şi greci. Şi totuşi, era cu adevărat inevitabil ca matematica să înceapă anume cu aceste discipline? Informaticianul Stephen Wolfram susţine în masiva sa carte *Un nou tip de ştiinţă* că lucrurile nu trebuiau neapărat să stea aşa. În particular, Wolfram arată că, pornind de la seturi simple de reguli care acţionează ca nişte scurte programe de calculator (numite *automate celulare),* se poate dezvolta un tip foarte diferit de matematică. Aceste automate celulare ar putea fi folosite (cel puţin în principiu) ca instrumente elementare de modelare a fenomenelor naturale, în locul ecuaţiilor diferenţiale care au dominat ştiinţa timp de trei secole. Ce a îndemnat atunci vechile civilizaţii spre descoperirea şi inventarea „mărcii" noastre speciale de matematică? Nu

ştiu, dar poate că s-a legat de particularităţile sistemului uman de percepţie. Oamenii detectează şi percep cu mare uşurinţă unghiurile, liniile drepte şi curbele line. Observaţi, de pildă, cu ce precizie putem determina (numai din ochi) dacă o linie e perfect dreaptă, sau cât de uşor ne e să distingem între un cerc şi o formă uşor eliptică. Aceste capacităţi perceptive au influenţat pesemne felul în care cunoaştem şi au condus la o matematică bazată pe obiecte discrete (aritmetica) şi figuri geometrice (geometria euclidiană).

Uniformitatea notaţiei simbolice este probabil rezultatul a ceea ce poate fi numit „efectul Microsoft Windows”: întreaga lume foloseşte sistemul de operare Microsoft – nu pentru că ar fi inevitabil, ci fiindcă, odată ce a început să domine piaţa calculatoarelor, toată lumea a fost nevoită să-l adopte pentru a uşura comunicarea şi a avea la îndemână produsele. În mod asemănător, notaţia simbolică occidentală a impus uniformitatea în lumea matematicii.

E interesant de observat că astronomia şi astrofizica au, la rândul lor, un cuvânt de spus în problema „invenţie şi descoperire”. Cele mai recente studii asupra planetelor extrasolare arată că aproximativ 5% dintre stele au cel puţin o planetă gigantică (cum e Jupiter în sistemul nostru solar) care se roteşte în jurul lor, iar acest raport rămâne în linii mari constant, în medie, în întreaga Cale Lactee. Deşi nu cunoaştem încă procentajul planetelor *terestre* (de tipul Pământului), sunt şanse ca în galaxie să existe miliarde de asemenea planete. Chiar dacă doar o mică (dar nu neglijabilă) parte dintre aceste „Pământuri” se află în *zona locuibilă* (domeniul orbitelor care permit existenţa apei sub formă lichidă pe suprafaţa planetei) din jurul stelelor-gazdă, probabilitatea ca viaţa în general, şi viaţa inteligentă în particular să se dezvolte pe suprafaţa acestor planete nu este nulă. Dacă am descoperi o altă formă de viaţă inteligentă cu care să putem comunica, am dobândi informaţii inestimabile despre formalismele elaborate de această civilizaţie pentru explicarea

cosmosului. Nu numai că am face progrese colosale în înţelegerea originii şi evoluţiei vieţii, dar am şi compara logica noastră cu sistemul logic al unor fiinţe posibil mai avansate.

Într-o notă mult mai speculativă, unele scenarii din cosmologie (de exemplu, cel numit *eterna inflaţie)* prezic posibilitatea existenţei universurilor multiple. În unele dintre aceste universuri ar putea fi diferite nu numai valorile *constantelor naturii* (de exemplu, tăriile diverselor forţe; rapoartele dintre masele particulelor subatomice), dar şi legile naturii. Astrofizicianul Max Tegmark susţine chiar că ar trebui să existe câte un univers care să corespundă cu (sau *să fie*, după cum se exprimă el) fiecare structură matematică posibilă. Dacă acest lucru ar fi adevărat, am avea o versiune extremă a ideii că universul este matematică – nu există doar o lume care să poată fi identificată cu matematica, ci un întreg ansamblu de lumi. Din păcate, această speculaţie nu numai că e radicală şi netestabilă în momentul de faţă, dar pare şi să contrazică (cel puţin în forma sa cea mai simplă) ceea ce se numeşte *principiul mediocrităţii.* După cum am arătat în capitolul 5, dacă luaţi un om la întâmplare de pe stradă, există o probabilitate de 95% ca înălţimea lui să se afle într-un interval de două abateri standard centrat pe valoarea medie a înălţimii. Un argument asemănător ar trebui să se aplice proprietăţilor universului, dar numărul structurilor matematice posibile creşte spectaculos odată cu sporirea complexităţii. Aceasta înseamnă că structura „cea mai mediocră" (apropiată de medie) ar trebui să fie extrem de complicată, ceea ce pare să intre în conflict cu relativa simplitate a matematicii noastre şi a teoriilor pe care le-am conceput despre univers, contrazicându-ne astfel aşteptările fireşti ca universul nostru să fie unul tipic.

Misterul lui Wigner

„Matematica este creată sau descoperită?" e o întrebare greşit pusă fiindcă presupune că răspunsul trebuie să fie ori una, ori alta, şi că cele două posibilităţi se exclud reciproc. Eu aş sugera în schimb că matematica e

în parte creată şi în parte descoperită. Oamenii inventează de regulă concepte matematice şi descoperă relaţiile dintre ele. Unele descoperiri empirice au precedat formularea conceptelor, dar conceptele însele au oferit fără îndoială un stimulent pentru descoperirea altor teoreme. Se cuvine să adaug că unii filosofi ai matematicii, cum ar fi americanul Hillary Putnam, adoptă o poziţie intermediară numită *realism* – ei cred în obiectivitatea discursului matematic (adică propoziţiile sunt adevărate sau false, iar ceea ce le face adevărate sau false se află în afara oamenilor), fără a accepta, ca Platon, existenţa „obiectelor matematice". Conduce vreuna dintre aceste perspective la o explicaţie mulţumitoare a misterului lui Wigner privind „imprevizibila eficacitate a matematicii"?

Îngăduiţi-mi întâi să trec repede în revistă câteva dintre soluţiile propuse de gânditorii contemporani. David Gross, laureat al Premiului Nobel pentru fizică, spune:

Există o opinie care, din câte ştiu, e destul de răspândită printre matematicienii de creaţie – aceea că structurile matematice la care ajung nu sunt creaţii artificiale ale minţii umane, ci au o anume naturaleţe, părând la fel de reale ca structurile create de fizicieni pentru a descrie aşa-numita lume reală. Cu alte cuvinte, matematicienii nu inventează o nouă matematică, ci o descoperă. Dacă aşa stau lucrurile, atunci poate că unele dintre misterele pe care le-am cercetat [„imprevizibila eficacitate"] devin mai puţin misterioase. Dacă matematica se ocupă cu structuri care sunt o parte reală a lumii naturale, la fel de reală precum conceptele din fizica teoretică, atunci nu e surprinzător că matematica este un instrument eficient în analizarea lumii reale.

Cu alte cuvinte, Gross se sprijină aici pe o versiune a ideii că matematica e descoperire, undeva între perspectiva platoniciană şi cea conform căreia „universul *este* matematică", dar mai aproape de prima. După cum am văzut, filosofic, e totuşi greu să susţii că matematica este descoperire. Apoi, platonismul nu poate rezolva cu adevărat problema formidabilei precizii despre care am

vorbit în capitolul 8, lucru recunoscut de Gross.

Sir Michael Atiyah, a cărui perspectivă asupra naturii matematicii am adoptat-o şi eu în mare parte, susţine următoarele:

Dacă privim creierul în contextul său evolutiv, atunci misteriosul succes al matematicii în ştiinţele fizice se explică cel puţin parţial. Creierul a evoluat pentru a se putea ocupa de lumea fizică, iar atunci n-ar trebui să ne surprindă că a elaborat un limbaj, matematica, bine adaptat acestui scop.

Acest raţionament seamănă mult cu soluţiile propuse de cognitivişti. Atiyah recunoaşte însă, la rândul lui, că explicaţia sa atinge doar superficial cele mai spinoase laturi ale problemei – felul în care matematica lămureşte cele mai esoterice aspecte ale lumii fizice. În particular, această explicaţie lasă complet neelucidată ceea ce am numit eficacitatea „pasivă” a matematicii (conceptele matematice îşi găsesc aplicaţii la mult timp după ce au fost inventate).

Atiyah observă: „Scepticul poate spune că lupta pentru supravieţuire ne cere să facem faţă doar fenomenelor fizice la scara umană, în timp ce teoria matematică pare să poată fi aplicată cu succes la toate scările, de la cea atomică la cea galactică”. Prin urmare, singura lui soluţie este: „Poate că explicaţia rezidă în natura ierarhică abstractă a matematicii, care ne permite să urcăm şi să coborâm pe scara lumii cu relativă uşurinţă”.

Matematicianul şi informaticianul american Richard Hamming (1915 – 1989) a făcut în 1980 o amănunţită şi interesantă analiză a misterului lui Wigner. Mai întâi, în privinţa naturii matematicii, a conchis că „matematica a fost făurită de om şi, prin urmare, poate fi în permanenţă modificată de el”. Apoi, a propus patru explicaţii posibile pentru imprevizibila ei eficacitate: (1) efectele selecţiei; (2) evoluţia instrumentelor matematice; (3) puterea explicativă limitată a matematicii; (4) evoluţia oamenilor.

Să ne amintim că efectele selecţiei sunt distorsiuni

introduse în rezultatele experimentelor fie de dispozitivele folosite, fie prin modul în care sunt obţinute datele. De pildă, dacă într-un test privind eficacitatea unui regim alimentar, cercetătorul îi exclude pe toţi cei care părăsesc testul, aceasta va influenţa rezultatul, fiindcă e foarte probabil ca aceia care renunţă să fie tocmai cei la care programul nu dă rezultate. Cu alte cuvinte, Hamming spune că, cel puţin în unele cazuri, „fenomenul iniţial apare din instrumentele matematice folosite, şi nu din lumea reală [...] mare parte din ceea ce vedem provine din ochelarii pe care îi purtăm". Ca exemplu, el subliniază faptul cunoscut că orice forţă care emană simetric dintr-un punct (şi conservă energia) trebuie să fie, în spaţiul tridimensional, invers proporţională cu pătratul distanţei – prin urmare aplicabilitatea legii newtoniene a gravitaţiei n-ar trebui să ne surprindă. Observaţia lui Hamming e corectă, dar efectele selecţiei nu pot explica formidabila precizie a anumitor teorii.

A doua soluţie posibilă a lui Hamming se bazează pe faptul că oamenii selectează şi perfecţionează continuu matematica pentru a se potrivi unei situaţii date. Cu alte cuvinte, Hamming lansează ideea că asistăm la ceea ce am putea numi „evoluţia şi selecţia naturală" a ideilor matematice – oamenii inventează un număr mare de concepte matematice, şi sunt alese doar acelea care se potrivesc. Ani de zile am crezut şi eu că aceasta este explicaţia completă. O interpretare asemănătoare a fost propusă de Steven Weinberg, laureat al Premiului Nobel pentru fizică, în cartea sa *Visul unei teorii finale*[33]. Poate să fie *aceasta* explicaţia misterului lui Wigner? Nu încape îndoială că o asemenea selecţie are într-adevăr loc. După cernerea diverselor formalisme şi instrumente matematice, oamenii de ştiinţă le păstrează pe cele care funcţionează, şi nu ezită să le aducă la zi sau să le schimbe atunci când apar altele mai bune. Dar, chiar dacă acceptăm această idee, de ce există de fapt teorii matematice care pot

33 Cartea a apărut în traducere românească la Editura Humanitas în 2009. *(N. t.)*

explica universul?

A treia idee a lui Hamming este că impresia noastră privind eficacitatea matematicii poate fi în realitate o iluzie, căci matematica nu explică multe lucruri din lumea înconjurătoare. În sprijinul acestei perspective, l-aş putea cita pe matematicianul Isra îl Moiseevici Gelfand: „Există doar un lucru mai imprevizibil decât imprevizibila eficacitate a matematicii în fizică, şi anume imprevizibila *ineficacitate* [s. m.] a matematicii în biologie". Nu cred că, în sine, această afirmaţie poate lămuri problema lui Wigner. Este adevărat că, spre deosebire de soluţia din *Ghidul autostopistului galactic*[34], nu putem spune că răspunsul la viaţă, la univers şi la tot ce există este „patruzeci şi doi". Cu toate acestea, există destule fenomene pe care matematica le elucidează *într-adevăr,* pentru a fi îndreptăţiţi s-o considerăm o explicaţie. Mai mult, spectrul faptelor şi proceselor care pot fi interpretate de matematică se lărgeşte continuu.

Cea de-a patra explicaţie a lui Hamming seamănă mult cu cea propusă de Atiyah – „Evoluţia darwinistă selectează în mod natural acele forme de viaţă aflate în competiţie, care au în minţile lor cele mai bune modele ale realităţii – «cele mai bune» însemnând cele mai bune pentru supravieţuire şi propagare".

Informaticianul Jef Raskin (1943 – 2005), cel care a iniţiat proiectul MacIntosh pentru Apple Computer, merge în aceeaşi direcţie, cu un accent pus pe rolul logicii. Raskin conchide că logica umană ne-a fost impusă de lumea fizică şi e, prin urmare, în concordanţă cu aceasta. Matematica provine din logică. De aceea matematica nu intră în contradicţie cu lumea fizică. Nu e aici niciun mister – dar nu trebuie să ne pierdem sentimentul de mirare şi de uimire în faţa naturii lucrurilor, chiar dacă ajungem să le înţelegem mai bine.

Hamming e însă mai puţin convins – chiar şi de forţa propriului său argument:

---

34 *The Hitchhiker S Guide to the Galaxy* - roman ştiinţifico-fantastic de Douglas Adams, după care s-a făcut un film celebru. *(N. t.)*

Dacă acceptăm că ştiinţa în genere are o vechime de 4.000 de ani, înseamnă că avem de-a face cu cel mult 200 de generaţii. Considerând efectele previzibile ale evoluţiei prin selecţia variaţiilor cu probabilitate mică, cred că evoluţia nu poate explica decât o mică parte din imprevizibila eficacitate a matematicii.

Raskin insistă asupra faptului că „bazele matematicii au fost puse cu mult înainte în strămoşii noştri, probabil cu milioane de generaţii în urmă". Trebuie să spun însă că acest argument nu mi se pare prea convingător. Chiar dacă logica a fost adânc întipărită în creierele strămoşilor noştri, e greu de înţeles cum această aptitudine a putut conduce la teoriile matematice ale lumii subatomice, cum este atât de precisa mecanică cuantică.

Hamming îşi încheie articolul recunoscând că „toate explicaţiile pe care le-am dat, luate împreună, pur şi simplu nu sunt de-ajuns pentru a explica ceea ce mi-am propus" (anume, imprevizibila eficacitate a matematicii).

Ar trebui oare să încheiem acceptând faptul că eficacitatea matematicii rămâne la fel de misterioasă cum ni se părea la început?

Înainte de a ne da bătuţi, să încercăm să distilăm esenţa misterului lui Wigner examinând ceea ce numim *metoda ştiinţifică.* Oamenii de ştiinţă află despre realităţile din natură printr-o serie de experimente şi observaţii. Datele sunt la început folosite pentru a elabora modele calitative ale fenomenelor (de pildă, că Pământul atrage merele, că particulele subatomice care se ciocnesc pot produce alte particule sau că universul se află în expansiune). În multe ramuri ale ştiinţei, chiar şi teoriile care apar pot rămâne nematematice. Unul dintre cele mai bune exemple de teorie de acest tip, având o mare forţă explicativă, este teoria darwinistă a evoluţiei. Chiar dacă selecţia naturală nu se bazează pe un formalism matematic, succesul ei în lămurirea originii speciilor e remarcabil. Pe de altă parte, în fizica fundamentală următorul pas implică de regulă încercări de a construi teorii matematice cantitative (de exemplu, relativitatea

generală, electrodinamica cuantică, teoria corzilor etc.). În fine, cercetătorii folosesc acele modele matematice pentru a prezice noi fenomene, noi particule şi rezultate ale unor experimente şi observaţii care n-au fost efectuate până atunci. Ceea ce i-a nedumerit pe Wigner şi Einstein a fost incredibilul succes al acestor două ultime etape. Cum e posibil ca fizicienii să descopere mereu instrumente matematice nu doar pentru a explica rezultatele experimentale şi observaţiile existente, dar şi pentru a conduce la o înţelegere absolut nouă şi la noi predicţii?

Voi încerca să răspund la această versiune a întrebării împrumutând un frumos exemplu de la matematicianul Reuben Hersh. Hersh a propus ca, în spiritul analizei în numeroase asemenea probleme de matematică (şi de fizică teoretică), să examinăm cel mai simplu caz posibil. Să considerăm aparent banalul experiment în care punem pietricele într-un vas opac. Să presupunem că punem întâi patru pietricele albe, iar apoi şapte pietricele negre. La un moment dat în istorie, oamenii au învăţat că, pentru anumite scopuri, ei pot reprezenta un ansamblu de pietricele de orice culoare printr-un concept abstract inventat de ei – numărul natural. Prin urmare, ansamblul de pietricele albe putea fi asociat cu numărul 4 (sau III sau IV sau oricare va fi fost simbolul folosit la acea vreme), iar pietricelele negre cu numărul 7. Prin experimente de tipul celui prezentat mai sus, oamenii au descoperit de asemenea că un alt concept inventat – adunarea aritmetică – reprezenta corect acţiunea fizică de acumulare. Cu alte cuvinte, rezultatul procesului abstract notat simbolic prin 4 + 7 poate prezice fără greş numărul final de pietricele din vas. Ce înseamnă asta? Înseamnă că oamenii au elaborat un formidabil instrument matematic – unul care poate prezice corect rezultatul *oricărui* experiment de acest tip! Acest instrument e în realitate mult mai puţin banal decât pare, deoarece acelaşi instrument nu funcţionează, de pildă, în cazul picăturilor de apă. Dacă punem patru picături de apă într-un vas, urmate de alte şapte picături, nu obţinem

unsprezece picături de apă în vas. De fapt, pentru a face o predicţie în experimente asemănătoare cu lichide (sau gaze), oamenii au trebuit să inventeze concepte cu totul diferite (greutatea, de exemplu) şi să înţeleagă că trebuie să cântărească individual fiecare picătură sau volum de gaz.

Concluzia e clară. Instrumentele matematice n-au fost alese în mod arbitrar, ci tocmai pe baza capacităţii lor de a prezice corect rezultatele experimentelor şi observaţiilor relevante. Prin urmare, cel puţin în acest caz foarte simplu, eficacitatea instrumentelor era garantată. Oamenii n-au trebuit să ghicească dinainte care era matematica corectă. Natura le permitea luxul încercărilor succesive pentru a afla dacă funcţionau. Oamenii n-au trebuit nici să rămână agăţaţi de aceleaşi instrumente în toate împrejurările. Uneori, dacă nu exista formalismul matematic potrivit pentru o anumită problemă, el trebuia inventat (cum s-a întâmplat cu Newton când a creat calculul infinitezimal sau cu matematicienii moderni care au ajuns la diverse idei topologice/geometrice în cercetările actuale din teoria corzilor). În alte cazuri, formalismul exista deja, dar cineva a trebuit să descopere că aceea era soluţia care îşi aştepta problema potrivită (cum s-a întâmplat când Einstein a folosit geometria nemanniană sau când fizicienii din domeniul particulelor elementare au folosit teoria grupurilor). Ideea este că, prin curiozitate permanentă, perseverenţă, imaginaţie creatoare şi hotărâre de neclintit, oamenii au găsit formalismele matematice relevante pentru a modela o gamă largă de fenomene fizice.

O trăsătură a matematicii esenţială pentru ceea ce am numit eficacitatea „pasivă” este eterna ei valabilitate. Geometria euclidiană rămâne şi azi la fel de corectă cum era în anul 300 î.Hr. Înţelegem acum că axiomele ei nu sunt inevitabile şi nu reprezintă adevăruri absolute despre spaţiu, ci adevăruri în cadrul unui univers particular, perceput de oameni, şi formalismul asociat lui, inventat de oameni. Şi totuşi, odată ce înţelegem contextul lor mai

limitat, toate teoremele rămân adevărate. Cu alte cuvinte, ramuri ale matematicii sunt încorporate în ramuri mai vaste, mai cuprinzătoare (de pildă, geometria euclidiană e doar una din versiunile posibile ale geometriei), dar valabilitatea în cadrul fiecărei ramuri persistă. Această longevitate nedefinită este cea care le-a permis oamenilor de ştiinţă să caute la orice moment instrumente matematice potrivite în întregul arsenal al formalismelor elaborate.

Exemplul simplu al pietricelelor dintr-un vas tot nu rezolvă două dintre aspectele misterului lui Wigner. În primul rând, se pune întrebarea de ce, în unele cazuri, s-ar părea că o teorie ne oferă mai multă precizie decât am pus iniţial în ea? În experimentul cu pietricele, precizia rezultatelor „prezise" (adunarea altor numere de pietricele) nu e cu nimic mai bună decât precizia experimentelor care au condus la formularea „teoriei" (adunarea aritmetică) de la bun început. Pe de altă parte, în teoria newtoniană a gravitaţiei, de pildă, precizia predicţiilor s-a dovedit cu mult superioară celei a observaţiilor care au generat-o. De ce? O scurtă reexaminare a istoriei teoriei lui Newton ne poate oferi unele indicii.

Modelul geocentric al lui Ptolemeu a fost cel dominant vreme de aproximativ cincisprezece secole. Deşi nu avea pretenţii de universalitate – mişcarea fiecărei planete era tratată individual – şi nu se menţionau cauzele fizice (de pildă, forţele, acceleraţia), acordul cu observaţiile era destul de bun. Nicolaus Copernic (14731543) şi-a publicat modelul heliocentric în 1543, iar Galilei l-a aşezat pe baze solide. Galilei a stabilit de asemenea fundamentele pentru legile mişcării, dar Kepler a fost acela care a dedus din observaţii primele legi matematice (deşi doar fenomenologice) ale mişcării planetelor. Kepler a folosit un uriaş corp de date, lăsate de astronomul Tycho Brahe, pentru a determina orbita lui Marte. A numit sutele de pagini de calcule rezultând de aici „războiul meu cu Marte". Cu excepţia a doua

nepotriviri, o orbită circulară era în acord cu toate observaţiile, dar Kepler n-a fost mulţumit de această soluţie, iar mai târziu avea să scrie despre raţionamentele pe care le-a făcut: „Dacă aş fi crezut că puteam ignora aceste opt minute [de arc; aproximativ un sfert din diametrul Lunii pline], mi-aş fi dres ipoteza [...] în mod corespunzător. Pentru că nu le puteam însă neglija, numai aceste opt minute mi-au arătat calea către o prefacere totală a astronomiei". Consecinţele meticulozităţii sale au fost spectaculoase. Kepler a dedus că orbitele planetelor nu sunt circulare, ci eliptice, şi a formulat în plus două legi cantitative care se aplică *tuturor* planetelor. Când aceste legi au fost cuplate cu legile de mişcare ale lui Newton, ele au servit ca bază pentru legea newtoniană a gravitaţiei universale. Să ne amintim însă că, între timp, Descartes propusese teoria vârtejurilor, în care planetele erau antrenate în jurul Soarelui de vârtejuri de particule aflate în mişcare circulară. Această teorie nu putea ajunge prea departe, nici măcar înainte ca Newton să-i dovedească falsitatea, pentru simplul motiv că Descartes n-a elaborat niciodată o tratare matematică sistematică a vârtejurilor.

Ce ne spune această scurtă poveste? Nu încape îndoială că legea newtoniană a gravitaţiei a fost opera unui geniu, dar un geniu care nu lucra în neant. O parte din fundamente fuseseră stabilite cu mari eforturi de înaintaşi. După cum am văzut în capitolul 4, matematicieni fără anvergura lui Newton, cum au fost arhitectul Christopher Wren şi fizicianul Robert Hooke, au propus în mod independent o lege a atracţiei invers proporţională cu pătratul distanţei. Măreţia lui Newton s-a vădit în capacitatea sa unică de a aduna totul laolaltă sub forma unei teorii unificatoare şi în stăruinţa de a da o demonstraţie matematică a consecinţelor teoriei sale. De ce era acest formalism atât de precis? În parte, pentru că trata o problemă fundamentală – forţele dintre două corpuri care gravitează şi mişcarea rezultantă. Nu apăreau alţi factori care să complice lucrurile. Pentru această problemă, şi numai pentru ea, Newton a obţinut o soluţie

completă. Prin urmare, teoria fundamentală era extrem de precisă, dar consecinţele ei trebuiau permanent îmbunătăţite. Sistemul solar nu e alcătuit doar din două corpuri. Dacă includem efectele altor planete (tot după legea inversului pătratului), orbitele nu mai sunt simple elipse. De pildă, s-a descoperit că orbita Pământului îşi schimbă uşor orientarea în spaţiu, într-o mişcare numită*precesie,* asemănătoare celei a axei unui titirez care se învârte. De fapt, studiile moderne au arătat că, în ciuda predicţiilor lui Laplace, orbitele planetelor pot deveni în cele din urmă haotice. Însăşi teoria fundamentală a lui Newton a fost mai târziu înglobată în relativitatea generală a lui Einstein, iar apariţia acesteia din urmă a fost şi ea precedată de o serie de starturi ratate şi eşecuri. Astfel, precizia unei teorii nu poate fi anticipată. Pomul se cunoaşte după roade – se fac în permanenţă modificări şi îmbunătăţiri până se ajunge la precizia dorită. Rarele cazuri în care o precizie superioară e atinsă dintr-un singur pas par adevărate miracole.

Există, desigur, un lucru esenţial aflat în culise şi care face să aibă sens căutarea legilor fundamentale: faptul că natura a fost atât de bună cu noi încât să fie guvernată de legi *universale,* iar nu de simple hotărâri regionale. Un atom de hidrogen de pe Pământ, unul de la celălalt capăt al Căii Lactee, ba chiar şi unul dintr-o galaxie aflată la zece miliarde de ani-lumină depărtare se comportă exact la fel – iar acest lucru rămâne valabil indiferent de direcţia sau de momentul în care privim. Matematicienii şi fizicienii au inventat un termen pentru aceste proprietăţi: ele se numesc *simetrii* şi reflectă imunitatea în raport cu schimbările de poziţie, de orientare sau de moment în care pornim ceasornicul. Fără aceste simetrii (şi fără altele), ar fi fost imposibil să descifrăm marele plan al naturii, fiindcă experimentele ar fi trebuit repetate continuu în fiecare punct al spaţiului (presupunând că într-un asemenea univers viaţa ar fi cu putinţă). O altă trăsătură a cosmosului care stă ascunsă în culisele teoriilor matematice este *caracterul local.* Ea

reflectă capacitatea noastră de a construi „imaginea de ansamblu” ca un puzzle, începând cu descrierea interacţiunilor simple la nivelul particulelor elementare.

Ajungem, în fine, la ultimul aspect al misterului lui Wigner: ce anume ne garantează că trebuie să existe o teorie matematică? Cu alte cuvinte, de ce există, de pildă, o teorie a relativităţii generale? Nu s-ar putea să nu existe pur şi simplu nicio teorie matematică a gravitaţiei?

Răspunsul e de fapt mai simplu decât v-aţi putea închipui. Nu avem nicio garanţie! Există o mulţime de fenomene pentru care nu se pot face predicţii precise, nici măcar în principiu. Această categorie include, de pildă, o clasă de sisteme dinamice care prezintă un comportament *haotic* – cea mai mică schimbare a condiţiilor iniţiale poate conduce la rezultate complet diferite. Din această clasă de fenomene fac parte fluctuaţiile bursei, condiţiile meteorologice deasupra Munţilor Stâncoşi, învârtirea unei bile pe o ruletă, fumul ce se ridică dintr-o ţigară şi orbitele planetelor din sistemul solar. Ceea ce nu înseamnă că matematicienii n-au elaborat formalisme ingenioase care atacă anumite aspecte importante ale acestor probleme, dar nu există nicio teorie deterministă pe baza căreia să facem predicţii. Teoria probabilităţilor şi statistica au fost create tocmai pentru a aborda aceste domenii unde nu există o teorie din care să obţinem mult mai mult decât am introdus. În mod asemănător, un concept numit *complexitate computaţională* defineşte limitele capacităţii noastre de a rezolva probleme prin algoritmi aplicabili, iar teoremele de incompletitudine ale lui Godel marchează anumite limite ale matematicii chiar în cadrul ei. Astfel, matematica e într-adevăr extraordinar de eficientă pentru anumite descrieri, în special cele care ţin de ştiinţa fundamentală, dar nu poate descrie universul în toate dimensiunile sale. Până la un punct, oamenii de ştiinţă şi-au ales problemele la care să lucreze pe baza faptului că aceste probleme pot fi tratate matematic.

Am rezolvat oare o dată pentru totdeauna misterul eficacităţii matematicii? Eu m-am străduit, dar mă îndoiesc

că toată lumea va fi pe deplin convinsă de argumentele expuse în această carte.

Pot însă cita din *Problemele filosofiei* de Bertrand Russell:

Astfel, pentru a rezuma discuţia noastră despre valoarea filosofiei: filosofia nu trebuie studiată pentru vreun răspuns tranşant la întrebările ei, căci niciun răspuns tranşant nu se poate demonstra că e adevărat, ci chiar pentru întrebările ei, fiindcă aceste întrebări lărgesc înţelegerea noastră privind ceea ce e posibil, ne îmbogăţesc imaginaţia intelectuală şi reduc siguranţa dogmatică ce blochează mintea în faţa speculaţiei; dar, mai presus de toate, fiindcă, prin măreţia universului pe care îl contemplă filosofia, mintea capătă la rândul ei măreţie şi se poate contopi cu universul, iar acesta e lucrul cel mai de preţ.

Note

Capitolul 1. Misterul pagina

11 *După cum spunea fizicianul britanic James Jeans*: Jeans 1930.

12 *Sau, aşa cum se mira odată Einstein*: Einstein 1934.

12 *acesta scoate în evidenţă geometria ca paradigmă*: Hobbes 1651.

12 *Penrose identifică trei „lumi" diferite*: Penrose vorbeşte despre aceste „trei lumi" în *Emperor*'s *New Mind* şi *Road to Reality.*

13 *Eugen Wigner (1902 – 1995), laureat al Premiului Nobel pentru fizică:* Wigner 1960. Vom reveni de mai multe ori la acest articol.

15 *încât declara cu emfază*: Hardy 1940.

15 *Una dintre cercetările sale s-a reîncarnat*: despre legea Hardy-Weinberg, vezi de exemplu Hedrick 2004.

15 *matematicianul britanic Clifford Cocks*: Cocks a inventat în 1973 algoritmul criptografic RSA, dar la acea vreme era secret. Câţiva ani mai târziu algoritmul a fost inventat independent de R. Rivest, A. Shamir, şi L. Adleman de la MIT. Vezi Rivest, Shamir şi Adleman 1978. [Vezi, de asemenea, Simon Singh, *Cartea*

codurilor, Editura Humanitas, Bucureşti, 2005 – *N. t.*]

16 *pentru a descrie toate simetriile din lume*: O prezentare accesibilă a simetriei, teoriei grupurilor şi a istoriei lor întreţesute se găseşte în *The Equation That Couldn't Be Solved* (Livio 2005), Stewart 2007, Ronan 2006 şi Du Sautoy 2008.

16 *A observat că un şir de numere*: O minunată prezentare pe înţelesul tuturor a apariţiei teoriei haosului poate fi găsită în Gleick 1987.

17 *formula Black-Scholes de evaluare*: Black şi Scholes 1973.

18 *Problema comis-voiajorului a fost rezolvată*: O excelentă prezentare a problemei şi a soluţiilor sale poate fi găsită în Applegate *et al.* 2007.

20 *şi-a exprimat foarte clar punctul de vedere*: Changeux şi Connes 1995.

20 *numerele şi matematica au propria*: Gardner 2003.

21 *În recenzia*: Atiyah 1995.

22 *După cum spunea neurologul*: Changeux şi Connes 1995.

23 *Ea se plânge într-un loc*: O scurtă biografie a lui Marjory Fleming poate fi găsită, de pildă, la Wallechinsky şi Wallace 1975 – 81.

24 *a spus odată matematicinul Ian Stewart*: Stewart 2004.

Capitolul 2. Misticii: Numerologul şi filosoful pagina

25 *Descartes a fost unul dintre principalii arhitecţi*: O prezentare mai amănunţită a contribuţiilor lui Descartes e dată în capitolul 4.

25 *„Nu recunosc nicio materie"*: Descartes 1644.

26 *Se crede că el a introdus termenii*: Iamblichos cca. 300 d.Hr.; prezentat în Guthrie 1987.

26 *biografii amănunţite ale lui Pitagora*: Laertios cca. 250 d.Hr., Porphyrios cca. 270 d.Hr., Iamblichos cca. 300 d.Hr.

26 *i se pare greu de identificat*: Aristotel cca. 350 î.Hr.; prezentat în Burkert 1972.

27 *Istoricul grec Herodot*: Herodot 440 î.Hr.

27 *Empedocle (cca. 492 – 432 î.Hr.) adaugă plin de admiraţie*: Porphyrios cca. 270 d.Hr.

28 *De pildă,* monada: O prezentare clară a perspectivei pitagoreice poate fi găsită în Strohmeier şi Westbrook 1999.

28 *Englezul Thomas Stanley*: Stanley 1687.

28 *Faptul că cineva găseşte numerele*: Pentru un excelent compendiu despre proprietăţile numerelor, vezi Wells 1986.

29 *Pitagora îi cere cuiva să numere*: Citat în Heath 1921.

29 *„Jur pe cel ce-a dăruit”*: Iamblichos cca. 300 d. Cr; prezentat în Guthrie 1987.

30 *Când două corzi asemănătoare*: Strohmeier şi Westbrook 1999; Stanley 1687.

31 *Cuvântul „gnomon”*: T.L. Heath face o analiză amănunţită a termenului şi a semnificaţiei sale în diferite momente (Heath 1921). Matematicianul Theon din Smyrna (cca. 70 – 135) a folosit termenul legat de expresia figurativă a numerelor – *Mathematics, Usefulfor Understanding Plato* (Theon din Smyrna cca. 130 d.Hr.).

34 *„Dacă vrea cineva să dea ascultare”*: Veţi observa că, în comentariul său, Proclos nu afirmă ce crede el însuşi cu privire la întrebarea dacă Pitagora a fost primul care a formulat teorema. Povestea despre bou apare în scrierile lui Laertios, Porphyrios şi ale istoricului Plutarh (cca. 46 – 120 d.Hr.). Ea se bazează pe versurile lui Apolodor. Versurile nu vorbesc însă decât despre „faimoasa propoziţie”, fără a spune despre care propoziţie este vorba. Vezi Laertios cca. 250 d.Hr., Plutarh cca. 75 d.Hr.

35 *Aceste construcţii erau fără îndoială cunoscute*: Renon şi Felliozat 1947, van der Waerden 1983.

36 *Filosofia elementară exprimată de tabelul*: Această cosmologie se baza pe ideea că realitatea se iveşte din faptul că Materia (considerată indefinită) e modelată de Formă (considerată a fi limita).

36 *Philosophy for Dummies*: Morris 1999.

37 *Cea mai veche relatare care ne-a rămas*: Joost-Gaugier 2006.

37 *Din perspectiva problemelor*: Analize privind contribuţiile pitagoreice şi influenţele acestora pot fi găsite în Huffman 1999, Riedweg 2005, Joost-Gaugier 2006 şi Huffman 2006 în *Stanford Encyclopedia of Philosophy.*

38 *Unul dintre pitagoricieni*: Fritz 1945.

39 *recunoaşterea existenţei infiniţilor „numărabili”*: Nu discut teme precum numerele transfinite şi cercetările lui Cantor şi Dedekind în cartea de faţă. Excelente relatări accesibile pot fi găsite în Aczel 2000, Barrow 2005, Devlin 2000, Rucker 1995 şi Wallace 2003.

39 *încât Iamblicos spune*: Iamblichos cca. 300 d.Hr.

40 *pentru pitagoricieni, nu Dumnezeu*: Netz 2005.

40 *Celebrul filosof*: Whitehead 1929.

41 *Cine a fost acest neobosit căutător*: Desigur, titlurile textelor despre Platon şi ideile sale pot umple numai ele un întreg volum. Iată aici doar câteva care mi s-au părut utile. Despre Platon în general: Hamilton şi Cairns 1961, Havelock 1963, Gosling 1973, Ross 1951, Kraut 1992. Despre matematică: Heath 1921, Cherniss 1951, Mueller 1991, Fowler 1999, Herz-Fischler 1998.

41 *Potrivit unui discurs*: Discursul a fost scris în 362 d.Hr., dar nu dădea niciun detaliu despre conţinutul inscripţiei. Cuvintele inscripţiei apar într-o notă pe marginea unui manuscris al lui Aelius Aristides. Nota ar putea să fi fost scrisă de oratorul Sopatros (secolul IV), şi spune: „Pe frontispiciul şcolii lui Platon scria «Nimeni să nu intre aici dacă nu a studiat geometria». [Adică] în loc de «necinstit» sau «nedrept»: căci geometria urmăreşte cinstea şi dreptatea”. Nota pare să arate că inscripţia lui Platon a înlocuit „om necinstit sau nedrept” în formula obişnuită în locurile sacre („Să nu intre niciun om necinstit sau nedrept”) cu „dacă nu a studiat geometria”. Această poveste a fost repetată de filosofii alexandrini din secolul V şi a ajuns în cartea *Chiliades* a lui Ioan Tzetzes (cca. 1110 – 1180), spirit

universal din secolul XII. Pentru o prezentare amănunţită, vezi Fowler 1999.

43 *Am fost dezamăgit să aflu*: Un rezumat a numeroase încercări arheologice nereuşite poate fi găsit în Glücker 1978.

44 *filosof şi istoric din secolul I*: Cherniss 1945, Mekler 1902.

44 *Filosoful şi matematicianul neoplatonician*: Cherniss 1945, Proclos cca. 450.

44 *„Aşadar este necesar”*: Platon cca. 360 î.Hr.

45 *„ştiinţafigurilor nu e doar”*: Washington 1788.

45 *nu e mai real decât umbrele proiectate*: O interesantă analiză a alegoriei poate fi găsită în Stewart 1905.

47 *Perspectiva lui Platon a stat la baza*: Pentru o analiză a platonismului şi locului acestuia în filosofia matematicii, vezi Tiles 1996, Mueller 1992, White 1992, Russell 1945, Tait 1996. Pentru o prezentare mai accesibilă, vezi Davis şi Hersh 1981, Barrow 1992.

48 *matematica se apropie mult de divin*: Mueller 2005.

48 *El susţine că în adevărata astronomie*: Comentariile lui Platon despre astronomie şi mişcarea planetelor apar în *Republica* (Platon cca. 360 î.Hr.), în *Timaios* şi în *Legile.* G. Vlastos şi I. Mueller discută consecinţele poziţiei lui Platon (Vlastos 1975, Mueller 1992).

50 *pentru a face publicitate*: Romanul este *Uncle Petros and Goldbach’s Conjecture* de A.K. Doxiadis (Doxiadis 2000).

50 *exemplu aparent nevinovat, aşa-numita* conjectură a lui Catalan: pentru o prezentare amănunţită, vezi Ribenboim 1994.

51 *Unii matematicieni, filosofi, specialişti în ştiinţele cognitive*: Voi prezenta pe larg aceste păreri în capitolul 9.

51 *„Potrivitorofeţilor, ultimul”*: Bell 1940.

Capitolul 3. Magicienii: Maestrul şi ereticul pagina

53 *„Printre fiinţe, unele există”*: Aristotel cca. 330 d.Hr.; vezi şi Koyre 1978.

54 *Folosind un experiment mintal ingenios*: Galilei 1589 – 1592.

55 *sistemul practic complet al deducţiei logice*: Acest lucru şi alte construcţii logice vor fi prezentate în capitolul 7.

56 *Atunci când istoricul matematicii*: Bell 1937.

57 *scrisă de un anume Heraclid*: Acest lucru e menţionat în comentariile despre *Măsurarea cercului* de Eutocius (cca. 480 – 540); vezi Heiberg 1910 – 15.

57 *mai interesat de isprăvile militare*: Plutarh cca. 75 d.Hr.

57 *Archimede s-a născut la Siracuza*: Anul naşterii sale a fost determinat din *Chiliades,* opera lui Ioan Tzetzes, autor bizantin din secolul XII.

57 *Arhimede petrece un timp la Alexandria*: Dijksterhuis 1957.

59 *Acest lucru a declanşat imediat o soluţie*: Arhitectul roman Marcus Vitruvius Pollio (secolul I î.Hr.) ne spune povestea în tratatul său *De architectura.* (Vezi Vitruviu, secolul I î.Hr.) Arhimede ar fi scufundat în apă o piesă de aur şi una de argint, ambele cu aceeaşi greutate ca a coroanei. Astfel a constatat că acea coroană a dezlocuit mai multă apă decât aurul, dar mai puţină decât argintul. Este uşor de arătat că, pornind de la volumele diferite de apă dezlocuite, se poate calcula raportul dintre greutatea aurului şi cea a argintului din coroană. Prin urmare, Arhimede nu a avut nevoie să folosească legile hidrostaticii pentru a rezolva problema coroanei.

59 *a fost citată de*: Într-o scrisoare a lui Thomas Jefferson către M. Correa de Serra din 1814, acesta scria: „Buna-credinţă a omenirii, aidoma pârghiei lui Arhimede, dacă are un punct de sprijin dat urneşte lumea”. Lord Byron menţionează afirmaţia lui Arhimede în *Don Juan.* JFK foloseşte fraza într-un discurs din campania electorală, citat în *The New York Times,* pe 3 noiembrie 1960. Mark Twain o foloseşte într-un articol intitulat „Arhimede” din

1887.

61 *Arhimede a folosit un sistem de oglinzi*: Un grup de studenţi de la MIT a încercat în octombrie 2005 să reproducă arderea unei corăbii folosind oglinzi. Unii dintre ei au repetat experimentul şi pentru emisiunea TV *Myth Busters.* Rezultatele au fost neconcludente, căci, deşi studenţii au obţinut o zonă de ardere auto-întreţinută, nu au produs o aprindere puternică. Un experiment similar realizat în Germania în septembrie 2002 a reuşit să aprindă pânza unei corăbii folosind 500 de oglinzi. O discuţie privind oglinzile arzătoare poate fi găsită pe un site web creat de Michael Lahanas.

61 *Potrivit unor relatări*: Exact aceste cuvinte ale lui Arhimede sunt menţionate în *Chiliade*; vezi Dijksterhuis 1957. Plutarh spune doar că Arhimede a refuzat să-l urmeze pe soldat la Marcellus înainte de a rezolva problema care îl absorbea (Plutarh cca. 75 d.Hr.).

62 *După cum observa matematicianul şi istoricul britanic*: Whitehead 1911.

63 *Cercetările lui Arhimede acoperă un spectru*: O superbă carte despre cercetările lui Arhimede este *The Works of Archimedes* (Heath 1897). Vezi şi Dijksterhuis 1957 şi Hawking 2005.

64 *„Unii cred, rege Gelon”*: Heath 1897.

66 *Povestea acestei descoperiri*: Pentru istoria palimpsestului, vezi Netz şi Noel 2007.

66 *Cândva în secolul X*: Probabil în 975.

66 *Copistul Ioannes Myronas*: Netz şi Noel 2007.

68 *Am avut norocul să întâlnesc*: Will Noel, directorul proiectului, a aranjat o întâlnire cu William Christens-Barry, Roger Easton, şi Keith Knox. Această echipă a conceput sistemul de imagistică şi a inventat algoritmul folosit pentru a dezvălui o parte din text. Tehnici de procesare a imaginii au fost elaborate şi de cercetătorii Anna Tonazzini, Luigi Bedini şi Emanuele Salerno.

69 *„Îţi voi trimite demonstraţiile”*: Dijksterhuis 1957.

71 *a anticipat* calculul diferenţial şi integral: Berliński

1996.

72 *Matematicianul grec Geminos*: Heath 1921.

72 *a cerut să-i fie cioplit*: Plutarh cca. 75 d.Hr.

73 *Iată o tulburătoare relatare a evenimentului*: Cicero secolul I î.Hr. Pentru o analiză a textului lui Cicero la nivel de structură, retorică şi simbolism, vezi Jaeger 2002.

74 *Galileo Galilei se naşte la Pisa*: O biografie modernă exhaustivă este *Galileo at Work* de S. Drake (Drake 1978). O lucrare mai accesibilă este *Galileo: A Life* (Reston 1994) de J. Reston. Vezi şi Van Helden şi Burr 1995. Operele complete ale lui Galilei (în italiană) apar în Favaro 1890 – 1909.

74 *„Cei care-i citesc scrierile”*: În *Mica balanţă,* Galilei 1586.

75 *„lemnul se mişcă mai repede”*: Galilei 1589 – 92 (Galilei 1600 a şi Galilei 1600 b). C.B. Schmitt sugerează (Schmitt 1969, după D.A. Maklich) că afirmaţia lui Galilei poate fi rezultatul faptului că mâna care ţine bila de plumb este mai obosită decât cea care ţine bila de lemn, prin urmare bila de lemn e eliberată mai repede. O excelentă prezentare a ideilor lui Galilei privind corpurile care cad poate fi găsită în Frova şi Marenzana 1998. O superbă prezentare a fizicii lui Galilei poate fi găsită în Koyre 1978.

76 *Viviani a creat imaginea populară*: O descriere completă a metodelor lui Galilei poate fi găsită în Shea 1972 şi în Machamer 1998.

76 *„era ignorant nu numai”*: Galilei 1589 – 92. Galilei îl critică din plin pe Aristotel în *De motu.* Vezi Galilei 1600 a, b.

76 *Virginia, Livia şi Vincenzio*: Povestea vieţii Virginiei, cunoscută mai târziu ca Sora Maria Celeste, apare în *Galileo's Daughter* de Dava Sobel (Sobel 1999).

78 *„Acum vreo zece luni”*: Galilei 1610 a, b. O excelentă prezentare a cercetărilor care au condus la telescop poate fi găsită în Reeves 2008.

78 *După cum spunea istoricului ştiinţei*: Swerdlow 1998.

Pentru o prezentare amănunţită a descoperirilor făcute de Galilei cu telescopul, vezi Shea 1972, Drake 1990.

79 *Îndreptându-şi telescopul spre Lună*: O prezentare accesibilă şi atrăgătoare a descoperiririlor lui Galilei, precum şi o istorie generală a telescopului pot fi găsite în Panek 1998.

80 *Importanţa descoperirii*: Copernicanismul lui Galilei este analizat pe larg de Shea 1998 şi Swerdlow 1998.

81 *în dispoziţie ludică, Galilei îi trimite lui Kepler*: Scrisoarea a fost scrisă pentru ambasadorul toscan la Praga, dar Galilei a inclus o anagramă pentru Kepler.

81 *Kepler a încercat fără succes să descifreze*: De fapt, i-a scris lui Galilei: „Te implor să nu mă laşi mult timp pradă îndoielii privind înţelesul. Căci, după cum vezi, ai de-a face cu nemţi adevăraţi. Gândeşte-te la ce disperare mă aduce tăcerea dumitale”. Citat în Caspar 1993.

82 *Scheiner susţinea că era imposibil*: întregul episod e relatat în amănunt în Shea 1972.

84 *Poetul scoţian Thomas Seggett*: Epigrama e în latină. Seggett (15701627) fusese elevul lui Galilei la Padova. Pentru un eseu despre poezie şi telescoape: Nicolson 1935.

84 *Sir Henry Wotton, un diplomat englez*: Curzon 2004.

85 *Aristotelicianul Giorgio Coresio*: Coresio 1612. Citat şi în Shea 1972.

85 *filosoful Vincenzo di Grazia din Pisa*: Apare în *Considerazioni* de di Grazia (1612), reprodus în *Opere di Galileo,* vol. 4, p. 385.

86 *În introducerea la tratatul său*: Citat în Shea 1972.

87 *Premisa caracterului imuabil*: întreaga poveste a controversei asupra naturii petelor solare e prezentată în Van Helden 1996 şi în Swerdlow 1998. Vezi şi Shea 1972.

88 *Întreaga poveste a lui* Il Saggiatoare: Galilei 1623.

89 *ţinute de Mario Guiducci, discipol al lui Galilei*: Antonio Favaro, care a editat toate lucrările lui Galilei, a descoperit că o mare parte a manuscrisului lui Guiducci

(conţinând conferinţele) era scrisă de mâna lui Galilei.

89 *„Să acceptăm că maestrul meu”*: Grassi 1619.

90 *„Cred că Sarsi este ferm convins”*: Galilei 1623.

91 Discursuri şi demonstraţii matematice: Galilei 1638.

93 *fondul obiecţiei*: excelente analize ale opiniilor lui Galilei despre relaţia dintre ştiinţă şi Scripturi pot fi găsite în Feldberg 1995 şi în McMullin 1998.

93 *Într-o lungă scrisoare către Castelli*: apare şi în von Gebler 1879.

94 *intra evident în contradicţie*: Teologul Melchior Cano spunea în 1585 că „nu numai cuvintele, dar şi fiecare virgulă [din Scriptură] provine de la Sfântul Duh”. Citat în Vawter 1972.

95 *Încercările ulterioare ale lui Galilei de a face apel*: O prezentare *in extenso* poate fi găsită în Redondi 1998.

95 Dialog despre cele două mari sisteme: Galilei 1632.

95 *„Te condamnăm la închisoarea oficială”*: de Santillana 1955.

96 *„Prin urmare, dorind să înlătur din”*: de Santillana 1955.

98 *„Faptul că Papa”*: Beltrán Mari 1994. Vezi şi discuţia în Frova şi Marenzana 1998.

Capitolul 4. Magicienii: Scepticul şi uriaşul pagina

100 *„cel mai măreţ pas făcut vreodată”*: Citat în Sedgwick şi Tyler 1917.

100 *René Descartes s-a născut pe 31 martie*: Există numeroase biografii ale lui Descartes. Clasică este Baillet 1691. Alte cărţi pe care le-am găsit utile sunt Vrooman 1970 şi relativ recenta Rodis-Lewis 1998. Bell 1937 este concisă, dar frumoasă. Foarte interesante sunt şi Finkel 1898, Watson 2002, şi Grayling 2005.

101 *Descartes îl opreşte pe primul trecător*: Deşi nu încape îndoială că Descartes l-a întâlnit într-adevăr pe Beeckman în acea zi, Beeckman nu menţionează în jurnalul său problema de pe tablă. Beeckman spune în schimb că Descartes „a făcut toate eforturile posibile

ca să demonstreze că în realitate unghiul nu există”.

101 *a cărui influenţă asupra studiilor lui Descartes*: Gaukroger 2002.

102 *Descartes are trei vise*: Majoritatea biografilor plasează această noapte în oraşul Ulm din statul Neuburg. Descartes însuşi povesteşte întâmplarea într-un carnet pe care l-au văzut primii biografi. Numai câteva pasaje transcrise au supravieţuit. Descartes a reluat în *Discurs* povestea viselor (Adam şi Tannery 1897 – 1910). O prezentare amănunţită a acestor vise şi a posibilelor lor interpretări poate fi găsită în Grayling 2005 şi Cole 1992.

104 *după cum îi scrie Descartes unui prieten*: Scrisoare către Pierre Chanut, ambasadorul Franţei în Suedia, care era şi filosof amator. Adam şi Tannery 1897 – 1910.

105 *Descartes a fost înmormântat în Suedia*: A fost iniţial înmormântat în cimitirul Nord-Malmoe. Când rămăşiţele i-au fost aduse în Franţa, au existat zvonuri (Adam şi Tannery 1897 – 1910) că o parte, şi anume craniul, ar fi rămas în Suedia. În Franţa, rămăşiţele au fost îngropate întâi în Abaţia Sainte-Geneviève, apoi în mănăstirea Petits-Augustins. În sfârşit, rămăşiţele au fost depuse în Catedrala Saint-Germain-des Prés, acolo unde se află azi Capela Saint-Benoît. Am găsit-o cu greu, pentru că nu mi-a venit să cred că Descartes nu era înmormântat singur. De fapt, în aceeaşi capelă sunt înmormântaţi doi benedictini, Mabillon şi Montfaucon, şi există numai bustul lui Mabillon.

106 *Ceea ce-l face pe Descartes cu adevărat modern*: Balz 1952.

106 *Descartes a recunoscut că metodele*: Adam şi Tannery 1897 – 1910. Majoritatea citatelor mele provin din această sursă. Există numeroase traduceri ale lucrărilor individuale, precum *The Philosophy of Descartes* (Veitch 1901), care conţine *Discurs despre metodă, Meditaţiile* şi *Principiile filosofiei.* Despre filosofia ştiinţei la Descartes, vezi şi Clarke 1992.

107 *acest potop de îndoieli tulburătoare*: O excelentă introducere în filosofia lui Descartes poate fi găsită în Cottingham 1986. Vezi de asemenea Wolterstorff 1999, Ricoeur 1996, Sorell 2005, Curley 1993, şi Beyssade 1993.

108 *El a schiţat-o într-o anexă de 10 bpagini*: Descartes 1637. Ediţia PL. Olscamp din 1965 conţine întreaga carte (Descartes 1637 a). O frumoasă traducere a *Geometriei,* care include şi un facsimil al primei ediţii, este *The Geometry of René Descartes* (tradusă de D.E. Smith şi M.L. Latham; Descartes 1637 b).

110 *Descartes a descoperit o cale de a reprezenta*: Rouse Ball 1908. O frumoasă şi accesibilă prezentare a vieţii şi operei lui Descartes poate fi găsită în Aczel 2005. Nivelul de abstracţie al algebrei lui Descartes e analizat în Gaukroger 1992.

112 *scriind tratatul de cosmologie şi fizică*: credinţa lui Descartes în existenţa „legilor naturii" se vede şi într-o scrisoare către Mersenne din mai 1632: „Am devenit suficient de îndrăzneţ pentru a căuta cauza poziţiei fiecărei stele fixe. Căci, deşi distribuţia lor pare neregulată, nu mă îndoiesc că se supun unei ordini naturale care e regulată şi determinată".

113 *Două dintre legile sale se apropie mult*: Adam şi Tannery 1897 – 1910. Vezi şi Miller şi Miller 1983. O bună prezentare a fizicii lui Descartes poate fi găsită în Garber 1992. O descriere mai generală a filosofiei naturale a lui Descartes apare în Keeling 1968.

116 *mormântul lui Newton din Catedrala Westminster*: Monumentul a fost ridicat în 1731. El i-a fost comandat lui William Kent şi sculptorului flamand Michael Rysbrack. În plus faţă de figura lui Newton, care se sprijină pe unele dintre lucrările sale, sculptura înfăţişează tineri purtând embleme ale principalelor descoperiri ale lui Newton. În spatele sarcofagului se află o piramidă, din mijlocul căreia se înalţă un glob pe care sunt desenate mai multe constelaţii, precum şi traiectoria cometei din 1681.

117 *De fapt, Newton a scris probabil*: Este imposibil de ştiut cu certitudine dacă Newton a avut sau nu intenţia să fie o insultă. R.K. Merton a descoperit că „pe umerii unor uriaşi” era o expresie destul de răspândită pe vremea lui Newton (Merton 1993).

117 *În răspunsul său la scrisoarea Hooke*: întreaga corespondenţă a lui Newton este adunată în Turnbull, Scott, Hall şi Tilling 1959 – 77.

117 *Vrajba dintre cei doi oameni de ştiinţă*: Vezi biografiile lui Newton, între care Westfall 1983, Hall 1992, şi Gleick 2003.

118 *nu păreau decât o colecţie*: Într-un text publicat în 1674, Hooke scrie despre gravitaţie că „puterea sa atractivă este cu atât mai mare cu cât este mai aproape de centrul ei corpul asupra căruia acţionează”. Astfel, deşi a avut intuiţia corectă, nu e reuşit s-o descrie matematic.

118 *„Prezentăm această lucrare drept principiile matematice”*: Există mai multe traduceri excelente ale *Principiilor* lui Newton, între care Motte 1729 şi Cohen şi Whitman 1999 (vezi Newton 1729). Cea mai accesibilă este versiunea revizuită a lui Chandrasekhar din 1995. Ideea generală de lege a gravitaţiei şi istoria ei sunt prezentate pe larg în Girifalco 2008, Greene 2004, Hawking 2007 şi Penrose 2004.

119 *chiar şi în cartea sa despre lumină*: Newton 1730.

120 *În* Memoirs of Sir Isaac Newton’s Life: Stukeley 1752. În plus faţă de biografiile complete există cărţi care prezintă episoade din viaţa lui Newton sau a apropiaţilor săi. Între ele, De Morgan 1885 şi Craig 1946.

121 *Indiferent dacă miticul eveniment*: În biografia închinată lui Newton, David Brewster scrie în 1831: „Celebrul pom, din care se spune că a căzut un măr care i-a atras atenţia lui Newton asupra gravitaţiei, a fost distrus de vânt acum vreo patru ani, dar dl. Tumor [proprietarul casei lui Newton din Woolsthorpe] l-a păstrat sub forma unui scaun”. Brewster 1831.

121 *Poate că totul a început în tinereţea lui Newton*: O bună prezentare a studiilor de matematică ale lui Newton se găseşte în Hall 1992.

122 *„În acelaşi an [1666] am început”*: Nota se află în Colecţia Portsmouth. Există alte documente care sugerează că Newton s-a gândit într-adevăr la legea proporţională cu inversul pătratului în timpul anilor de ciumă. Vezi Whiston 1753, de exemplu.

123 *Din motive nu tocmai limpezi*: Pentru întârzierea anunţului legii newtoniene a gravitaţiei, vezi Cajori 1928 şi Cohen 1982. În următoarea secţiune, prezint două explicaţii pe care le consider cele mai convingătoare.

124 *„În 1684 Dr Halley a venit”*: De Moivre îşi aminteşte aici ceea ce îi povestise Newton.

126 *Unii au lansat chiar ipoteza*: Acest lucru e sugerat, de pildă, de Cohen 1982.

127 *cu ocazia sărbătoririi bicentenarului*: Glaisher 1888.

130 *Pentru Newton, însăşi existenţa lumii*: În *Principia* spune despre Dumnezeu: „Este omniprezent nu numai *în principiu,* dar şi *în mod efectiv*... Este numai ochi, urechi, creier, forţă de simţire, de înţelegere şi de acţiune”. Într-un manuscris de pe la 1700, achiziţionat la Sotheby în 1936 şi expus la Ierusalim în 2007, Newton foloseşte Cartea lui Daniel pentru a calcula data Apocalipsei. Dacă sunteţi cumva îngrijoraţi, aflaţi că nu există niciun motiv ca „[lumea] să sfârşească înainte de „2060.

130 *Validitatea argumentelor cosmologic, teologic*: Vezi Dennett 2006, Dawkins 2006 şi Paulos 2008.

132 *Acest gen de manevră logică*: Vezi Dennett 2006, Dawkins 2006, Paulos 2008.

Capitolul 5. Statisticienii şi probabiliştii: Ştiinţa incertitudinii pagina

134 *Ramura matematicii numită* calcul infinitezimal: Prezentări accesibile ale calculului infinitezimal pot fi găsite în Berliński 1996, Kline 1967 şi Bell 1951. Mai tehnică, dar excelentă, este Kline 1972.

135 *membrii legendarei familii Bernoulli*: Pentru unele dintre realizările acestei remarcabile familii, vezi Maor 1994, Dunham 1994. Vezi şi „Bernoulli-Edition" (în germană) pe pagina de web a Universităţii din Basel (http://www.ub. unibas.ch/spez/bernoulli.htm). Informaţii în engleză despre proiect pot fi găsite la adresa http://www.springer.com/cda/content/document/cdadownloaddocument/bernoulli2005 web. Pdf? SGWID = 0 – 0 – 45 – 169442 – 0

135 *pentru duşmăniile din familie*: Hellman 2006.

135 *problema catenarei*: O excelentă prezentare a problemei, în particular a soluţiei lui Huygens, poate fi găsită în Bukowski 2008. Soluţiile lui Bernoulli, Leibniz şi Huygens apar în Truesdell 1960.

136 *„Spui căfratele meu a propus"*: Citat în Truesdell 1960.

138 *Încercare filosofică asupra probabilităţilor*: Laplace 1814 (traducere de Truscot şi Emory din 1902).

142 *John Grăunt (1620 – 1674) se pregătise*: Excelente prezentări ale vieţii şi operei lui Grăunt pot fi găsite în Hald 1990, Cohen 2006 şi Grăunt 1662.

145 *lucrarea lui Halley, purtând titlul cam lung*: Lucrarea este reprodusă în Newman 1956.

147 *Iată cum prezintă Jakob Bernoulli*: Citat în Newman 1956. Cercetările sale sunt rezumate în Todhunter 1865.

148 *Adolphe Quetelet s-a născut*: Două excelente cărţi despre Quetelet şi opera sa sunt Hankins 1908 şi Lottin 1912. Vezi de asemenea Stigler 1997, Krüger 1987 şi Cohen 2006.

149 *„Şansa, acest cuvânt misterios"*: Quetelet 1828.

151 *era un tip pe care natura*: Quetelet a scris în memoriul său asupra înclinaţiei către crimă: „Dacă omul mediu ar fi determinat pentru o naţiune, el ar reprezenta tipul acelei naţiuni; dacă ar putea fi determinat din totalitatea oamenilor, el ar reprezenta tipul întregii rase umane".

153 *Cel care a introdus conceptul*: Pentru o

prezentare accesibilă a operei lui Galton şi Pearson, vezi Kaplan şi Kaplan 2006.

155 *Studiul serios al probabilităţilor*: Vezi Aczel 2004, Kaplan şi Kaplan 2006, Connor 2006, Burger şi Starbird 2005 şi Tabak 2004.

155 *într-o scrisoare datată29 iulie 1654*: Todhunter 1865, Hald 1990.

156 *Esenţa teoriei probabilităţilor*: O excelentă, accesibilă şi scurtă prezentare a unora dintre principiile esenţiale ale teoriei probabilităţilor poate fi găsită în Kline 1967.

156 *Teoria probabilităţilor ne oferă informaţii precise*: Pertinenţa teoriei probabilităţilor în numeroase situaţii din viaţa reală e excelent prezentată în Rosenthal 2006.

158 *Cel care a introdus probabilităţile*: pentru o excelentă biografie, vezi Orel 1996.

160 *Mendel a publicat articolul*: Mendel 1865. O traducere în engleză poate fi găsită pe pagina web creată de R.B. Blumberg la adresa http://www.mendelweb.org

160 *Deşi există anumite îndoieli legate de precizia*: Vezi Fisher 1936, de exemplu.

160 *marele statistician britanic*: Pentru o scurtă prezentare a unora dintre cercetările sale, vezi Tabak 2004. Fisher a scris un articol extrem de original şi accesibil despre planificarea experimentelor, intitulat „Mathematics of a Lady Tasting Tea" (vezi Fisher 1956).

162 *în cartea sa* Ars Conjectândi: Vezi Bernoulli 1713 b.

164 *El explică apoi*: Reprodus în Newman 1956.

165 *Shaw a scris un articol*: Articolul „The Vice of Gambling and the Virtue of Insurance" apare în Newman 1956.

167 *Într-o broşură intitulată* Analistul: Broşura a fost scrisă de George Berkeley în 1734. O versiune revizuită de David Wilkins este menţinută pe web; vezi Berkeley 1734.

Capitolul 6. Geometrii: Şocul viitorului pagina

168 *În celebra sa carte* şocul viitorului: Toffler 1970.

169 *Hume identifică două tipuri*: Hume 1748.

170 *Kant s-a întrebat nu ce putem şti*: Potrivit lui Kant, una dintre sarcinile fundamentale ale filosofiei este de a da seamă de posibilitatea unei cunoaşteri sintetice a priori a conceptelor matematice. Vezi, de pildă, Hoffe 1994 şi Kuehn 2001, pentru conceptele generale, şi Trudeau 1987.

170 *„Spaţiul nu este un concept”*: Kant 1781.

171 *Primele patru axiome euclidiene*: Pentru o introducere în geometria euclidiană şi în cele neeuclidiene, vezi Greenberg 1974.

171 *demonstraţiile primelor douăzeci şi opt*: teoremele demonstrate fără cel de-al cincilea postulat sunt discutate în Trudeau 1987.

172 *Unele dintre aceste tentative*: O excelentă prezentare a tuturor încercărilor care au condus în cele din urmă la apariţia geometriei neeuclidiene poate fi găsită în Bonola 1955.

174 *Primul care a publicat un întreg tratat*: Traducerea lui George Bruce Halsted din 1891 a tratatului lui Lobachevski, „Geometrical Researches on the Theory of Paralels”, apare în Bonola 1955.

174 *tânărul matematician maghiar János Bolyai*: Pentru o biografie şi o prezentare a operei sale, vezi Gray 2004. Nu am inclus aici un portret al lui János Bolyai pentru că tabloul folosit de obicei este de autenticitate îndoielnică. Se pare că singurul său portret autentic este un basorelief pe faţada Palatului Culturii din Marosvăsărhely (Târgu Mureş).

175 *Manuscrisul se intitula*: Ştiinţa absolută a spaţiului: Un facsimil al originalului (în latină) şi traducerea în engleză a lui George Bruce Halsted apar în Gray 2004.

177 *Nu încape îndoială că Gauss*: O excelentă prezentare a întregului episod, din perspectiva vieţii şi operei lui Gauss, poate fi găsită în Durmington 1955. Vezi de asemenea Kline 1972. O parte din corespondenţa lui Gauss privind geometria neeuclidiană e prezentată de Ewald 1996.

178 *Într-o strălucită conferinţă ţinută la Göttingen*: O traducere în engleză a conferinţei, precum şi a articolelor despre geometriile neeuclidiene poate fi găsită în Peste 2007.

181 *Perspectiva lui Poincaré*: Poincaré 1891.

183 *în primul capitol din* Ars Magna: Cardano 1545.

184 *o altă lucrare importantă,* Treatise of Algebra: Wallis 1685. Pentru biografia şi opera lui Wallis, vezi Rouse Ball 1908.

184 *opiniile au început să se schimbe*: Un rezumat poate fi găsit în Cajori 1926.

185 *Într-un articol intitulat „Dimensiune”*: Acest articol a apărut în *Enciclopedia* lui Diderot. Citat în Archibald 1914.

185 *afirmând în 1797*: Lagrange 1797.

185 *Provenind dintr-o familie cu doisprezece copii*: O excelentă biografie şi prezentare a operei lui Grassmann (în germană) poate fi găsită în Petsche 2006. Vezi şi O'Connor şi Robertson 2005.

186 *Este fascinant de urmărit*: Prezentări accesibile (dar tehnice) ale studiilor sale de algebră liniară pot fi găsite în Feamley-Sander 1979 şi 1982.

187 Pe la *1860, geometria în n dimensiuni*: O bună introducere este Sommerville 1929.

188 *prin următoarea „declaraţie de independenţă”*: Textul apare în Ewald 1996.

188 *La care algebristul Richard Dedekind*: Textul apare în Ewald 1996.

189 *Iată ce spunea matematicianul francez*: Prima scrisoare a lui Stieltjer către Hermite este datată 8 noiembrie 1882. Corespondenţa dintre cei doi matematicieni constă în 432 de scrisori. Întreaga corespondenţă apare în Hermite 1905. Traducerea de aici îmi aparţine.

189 *„Matematicienii au construit”*: Conferinţa poate fi găsită în O'Connor şi Robertson 2007.

Capitolul 7. Logicienii: Reflecţie asupra raţionamentului pagina

191 *În anunţul din faţa unei frizerii*: Paradoxul frizerului satului e discutat în multe cărţi. Vezi Quine 1966, Rescher 2001 şi Sørensen 2003, de exemplu.

191 *Iată cum prezintă Russell*: Russell 1919. Aceasta e cea mai cunoscută expunere a ideilor sale din logică.

192 *Pentru a da o imagine completă*: Programul intuiţionist al lui Brouwer este bine rezumat de van Stegt 1998. O excelentă expunere accesibilă apare în Barrow 1992. Disputa dintre formalism şi intuiţionism este prezentată în Hellman 2006.

193 *sensul unei afirmaţii matematice*: Dummett adaugă: „Un individ nu poate comunica un lucru pe care nu poate fi observat că îl comunică: dacă un individ a asociat un anumit conţinut mental cu un simbol sau cu o formulă matematică, iar asocierea nu constă în folosirea simbolului sau a formulei, atunci el nu poate transfera conţinutul cu ajutorul simbolului sau formulei, căci publicul nu-şi dă seama de asociaţie şi n-are cum să-şi dea seama". Dummett 1978.

193 *logica se ocupa cu relaţiile*: O introducere extrem de accesibilă poate fi găsită în Bennett 2004. Mai tehnică, dar excelentă, este Quine 1982. Un frumos rezumat al istoriei logicii de Czesław Lejewski apare în *Encyclopaedia Britannica.*

195 *De Morgan a fost extrem de prolific*: O prezentare concisă, dar pătrunzătoare, a vieţii şi operei sale e dată în Ewald 1996.

197 *povestea mai târziu în* Analiza matematică a logicii: Boole 1847.

197 *George Boole s-a născut*: Pentru o biografie completă, vezi MacHale 1985.

199 *„Scopul tratatului"*: Boole 1854.

202 *În ciuda solidităţii concluziei lui Boole*: Boole a conchis că, atunci când e vorba de credinţa în existenţa lui Dumnezeu, „paşii şovăielnici ai unei înţelegeri limitate în facultăţile sale şi în materia cunoaşterii sale sunt mai de folos decât încercarea ambiţioasă de a ajunge la certitudine pe baza religiei naturale".

203 *Frege reuşeşte să publice*: Frege 1879. Aceasta este una dintre cele mai importante lucrări din istoria logicii.

204 *În* Legile fundamentale ale aritmeticii: Frege 1893, 1903.

204 *Axiomele logice ale lui Frege*: Pentru o discuţie generală privind ideile şi formalismul lui Frege, vezi Resnick 1980, Demopoulos şi Clark 2005, Zalta 2005 şi 2007 şi Boolos 1985. Pentru prezentarea generală a logicii matematice, vezi Delong 1970.

205 *A continuat apoi definind toate numerele naturale*: Frege 1884.

208 *„tuturor mulţimilor care nu sunt membre”*: Paradoxul lui Russell şi consecinţele sale, precum şi posibilele soluţii sunt discutate, de pildă, în Boolos 1999, Clark 2002, Sainsbury 1988 şi Irvine 2003.

209 *cele trei volume din* Principia Mathematica: Whitehead şi Russell 1910. Pentru o prezentare accesibilă a *Principiilor,* vezi Russell 1919.

209 *În* Principia, *Russell şi Whitehead*: Pentru ciocnirea dintre ideile lui Frege şi cele ale lui Russell, vezi Beaney 2003. Pentru logicismul lui Russell, vezi Shapiro 2000, şi Godwyn şi Irvine 2003.

210 *Russell a propus o* teorie a tipurilor: Vezi Urquhart 2003.

211 *Teoria tipurilor propusă de Russell*: Teoria tipurilor a decăzut într-adevăr din graţiile majorităţii matematicienilor. Un construct similar şi-a găsit totuşi aplicaţii în programare. Vezi Mitchell 1990, de exemplu.

212 *matematicianul german Ernst Zermelo*: Vezi Ewald 1996 pentru o prezentare a contribuţiilor sale.

212 *Schema lui Zermelo a fost dezvoltată*: Traduceri ale lucrărilor originale ale lui Zermelo, Fraenkel şi ale logicianului Thoralf Skolem pot fi găsite în van Heijenoort 1967. Pentru o relativ accesibilă introducere în mulţimi şi axiomele lui Zermelo-Fraenkel, vezi Devlin 1993.

212 *axioma alegerii afirmă*: O foarte amănunţită analiză a

axiomei poate fi găsită în Moore 1982.

213 *cunoscută drept* ipoteza continuumului: Cantor a dedus o metodă pentru a compara cardinalele mulţimilor infinite. În particular, a demonstrat că mulţimea numerelor reale are un cardinal mai mare decât mulţimea numerelor întregi. A formulat apoi ipoteza continuumului, care afirma că nu există nicio mulţime al cărei cardinal să fie strict cuprins între cel al numerelor întregi şi cel al numerelor reale. Atunci când David

Hilbert a enunţat celebrele sale probleme de matematică în 1900, întrebarea dacă ipoteza continuumului era adevărată a fost prima sa problemă. Vezi Woodin 2001 a, b.

213 *datorate matematicianului american Paul Cohen*: şi-a prezentat cercetările în Cohen 1966.

214 *Pentru el, matematica însemna pur şi simplu*: O bună prezentare a programului lui Hilbert poate fi găsită în Sieg 1988. Vezi de asemenea Shapiro 2000.

215 *„Cercetările mele privind noile fundamente”*: Hilbert a ţinut această conferinţă la Leipzig, în septembrie 1922. Textul poate fi găsit în Ewald 1996.

215 *pentru adepţii săi formalişti*: Vezi Detlefsen 2005.

215 *considerat de unii drept cel mai mare*: R. Monk a scris o excelentă biografie (Monk 1990).

216 *„Dacă nu mi-e limpede care e natura”*: În Waismann 1979.

216 *Kurt Godel s-a născut*: O recentă biografie este Goldstein 2005. Biografia standard era Dawson 1997.

217 *publica* teoremele de incompletitudine: Pentru teoremele lui Godel, semnificaţia lor şi legăturile cu alte ramuri ale cunoaşterii, vezi Hofstadter 1979, Nagel şi Newman 1959 şi Franzen 2005.

218 *„Dar, în pofida depărtării”*: Godel 1947.

218 *Omul Godel era la fel de complex*: Pentru perspectiva filosofică a lui Godel, vezi Wang 1996.

219 *„În 1946, Godel a făcut cerere”*: Morgenstern 1971.

223 *Acum, tot ce exista era un „joc” formal*: Evident, e o simplificare excesivă, permisă numai într-un text de popularizare. De fapt, încercări serioase în logicism continuă şi azi. De regulă, ele presupun că multe adevăruri matematice pot fi cunoscute a priori. Vezi Wright 1997 şi Tennant 1997, de exemplu.

Capitolul 8. Eficacitate imprevizibilă?

pagina

225 *Diverselor noduri li s-au dat*: O carte interesantă despre cum se fac nodurile este Ashley 1944.

225 *Teoria matematică a nodurilor*: Vandermonde 1771. Un excelent rezumat al istoriei teoriei nodurilor poate fi găsit în Przytycki 1992. Pentru teorie, vezi Adams 1994. Cărţi accesibile sunt Neuwirth 1979, Peterson 1988, şi Menasco şi Rudolph 1995.

226 *Eforturile lui Thomson s-au concentrat*: Vezi Sossinsky 2002 şi Atiyah 1990.

228 *Tait a ales calea grea*: Tait 1898, Sossinsky 2002. O scurtă biografie a lui Tait poate fi găsită în O’Connor şi Robertson 2003.

229 *Maxwell i-a dedicat următorul catren*: Knott 1911.

229 *profesorul Charles Newton Little*: Little 1899.

230 *Topologia – geometria foii de cauciuc*: O introducere tehică, dar elementară în topologie este oferită în Messer şi Ştraffin 2006.

230 *avocatul şi matematicianul newyorkez*: Perko 1974.

231 *Un progres în teoria nodurilor a fost făcut*: Alexander 1928.

232 *prolificul matematician anglo-american*: Conway 1970.

232 *Examinarea relaţiei a dezvăluit până la urmă*: Jones 1985.

234 *asupra unui spectru larg de discipline ştiinţifice*: De pildă, matematicianul Louis Kauffman a demonstrat o relaţie între polinomul Jones şi fizica statistică. O carte excelentă, dar tehnică, despre aplicaţiile în fizică este Kauffman 2001.

235 *Agenţii care se ocupă*: O excelentă descriere a teoriei nodurilor şi a acţiunii enzimelor este dată în Summers

1995. Vezi şi Wasserman şi Cozzarelli 1986.

238 *Teoria corzilor pare a fi*: Vezi Greene 1999, Randall 2005, Krauss 2005 şi Smolin 2006. Pentru o introducere tehnică, vezi Zweibach 2004.

238 *specialiştii în teoria corzilor Hirosi Ooguri şi Cum run Vafa*: Ooguri şi Vafa 2000.

239 *au descoperit o legătură surprinzătoare*: Witten 1989.

239 *regândit din perspectivă pur matematică*: Atiyah 1989; vezi Atiyah 1990 pentru o perspectivă mai largă.

240 *Eric Adelberger, Daniel Kapner şi colaboratorii lor*: Kapner *et al.* 2007.

241 *Einstein avea un motiv foarte puternic*: Există numeroase expuneri ale ideilor relativităţii speciale şi generale. Voi menţiona aici doar câteva care mi-au plăcut în mod special: Davies 2001, Deutsch 1997, Ferris 1997, Gott 2001, Greene 2004, Hawking şi Penrose 1996, Kaku 2004, Penrose 2004, Rees 1997 şi Smolin 2001. O recentă şi minunată prezentare a omului Einstein şi a ideilor sale apare în Isaacson 2007. Alte cărţi despre Einstein şi lumea sa sunt Bodanis 2000, Lightman 1993, Overbye 2000 şi País 1982. Pentru o frumoasă colecţie de articole originale, vezi Hawking 2007. [Vezi, de asemenea, Jeremy Bernstein, *Albert Einstein şi frontierele fizicii,* Editura Humanitas, Bucureşti, 2011.]

245 *Cel mai recent test a fost rezultatul*: Kramer *et al.* 2006.

246 *un grup de fizicieni de la Universitatea Harvard*: Odom *et al.* 2006.

246 *La sfârşitul anilor 1960, fizicienii*: o excelentă prezentare poate fi găsită în Weinberg 1993.

Capitolul 9. Despre mintea umană, matematică şi univers pagina

248 *Iată ce spun*: Davis şi Hersh 1981.

249 *reprezentând punctul de vedere platonician*: Hardy 1940.

249 *susţin exact părerea opusă*: Kasner şi Newman 1989.

251 *Cei care cred că matematica există*: Una dintre cele mai bune cărţi de popularizare despre natura matematicii este Barrow 1992. O carte ceva mai tehnică, dar accesibilă, este Kline 1972.

251 *Am vorbit deja despre*: Vezi de asemenea Barrow 1992.

251 *Tegmark susţine că*: Tegmark 2007 a, b.

252 *ca răspuns la o afirmaţie asemănătoare*: Changeux şi Connes 1995.

253 *În cartea sa din 1997*: Dehaene 1997.

253 *Dehaene şi colaboratorii săi*: Dehaene *et al.* 2006.

253 *Nu toţi cognitiviştii*: Vezi Holden 2006, de exemplu.

254 *face următoarea observaţie*: Changeux şi Connes 1995.

254 *cea mai categorică opinie*: Lakoff şi Núñez 2000.

255 *Neurologii au identificat*: Vezi Ramachandran şi Blakeslee 1999, de pildă.

255 *Neurologul Rosemary Varley*: Varley *et al.* 2005; Klessinger *et al.* 2007.

256 *Să ne întoarcem la Atiyah*: Atiyah 1995.

257 *Din secolul XIX*: Pentru o prezentare amănunţită a secţiunii de aur, a istoriei şi proprietăţilor ei, vezi Livio 2002 şi Herz-Fischler 1998.

261 *Numerele prime, în calitate de* concept: Vezi articolul lui Yehuda Rav din Hersh 2000.

262 *Antropologul Leslie A. White*: White 1947.

263 *a atras atenţia prin anii 1960 asupra faptului*: Vezi Hockett 1960.

263 *Prima proprietate reprezintă capacitatea*: Vezi Obler şi Gjerlow 1999.

263 *sunt caracteristice şi matematicii*: Asemănările dintre limbaj şi matematică sunt discutate în Sarrukai 2005 şi Atiyah 1994.

263 *Noam Chomsky şi-a publicat celebrele sale*: Chomsky 1957. Mai multe despre lingvistică se găsesc în Aronoff şi Rees-Miller 2001. O interesantă carte de popularizare este Pinker 1994.

264 *Informaticianul Stephen Wolfram susţine*: Wolfram 2002.

265 *Astrofizicianul Max Tegmark susţine*: Tegmark a identificat patru tipuri distincte de universuri paralele. La „nivelul!” sunt universurile cu aceleaşi legi ale fizicii, dar cu condiţii iniţiale diferite. La „nivelul II” sunt universurile cu aceleaşi ecuaţii ale fizicii, dar, poate, cu constante diferite ale naturii. „Nivelul III” presupune interpretarea mecanicii cuantice din perspectiva „mai multor lumi”, iar la „nivelul IV” există structuri matematice diferite. Tegmark 2004, 2007 b.

266 *ceea ce se numeşte* principiul mediocrităţii: Vezi Vilenkin 2006.

266 *adoptă o poziţie intermediară numită* realism: Putnam 1975.

266 *Îngăduiţi-mi întâi să trec repede în revistă*: Există şi alte opinii pe care nu le prezint aici. De pildă, Steiner (2005) susţine că Wigner nu arată că exemplul pe care îl dă pentru „imprevizibila eficacitate” nu se leagă de faptul că e vorba de concepte matematice.

266 *David Gross, laureat al Premiului Nobel pentru fizică, scrie*: Gross 1988. Pentru o prezentare mai amplă a relaţiei dintre matematică şi fizică, vezi Vafa 2000.

267 *Sir Michael Atiyah, a cărui perspectivă*: Atiyah 1995; vezi şi Atiyah 1993.

268 *Matematicianul şi informaticianul american Richard Hamming:* Hamming 1980.

269 *O interpretare asemănătoare a fost propusă*: Weinberg 1993.

269 *l-aş putea cita pe*: În Borovik 2006.

270 *Raskin conchide că*: Raskin 1998.

271 *Hersh a propus ca, în spiritul*: Vezi Hersh 2000.

274 *Kepler a folosit un uriaş corp de date*: Cărţile lui Kepler (Kepler 1981 şi 1997) sunt o interesantă lectură pentru istoria ştiinţei. Ca biografii, vezi Caspar 1993 şi Gingerich 1973.

275 *orbitele planetelor pot deveni în cele din urmă*: Vezi Lecar *et al.* 2001.

276 *Răspunsul e de fapt mai simplu*: O interesantă prezentare a utilităţii matematicii apare în Raymond

2005. Vezi de asemenea Wilczek 2006, 2007.

277 Problemele filosofiei de *Bertrand Russell*: Russell 1912.

Bibliografie

Aczel, 2000. *The Mystery of the Aleph: Mathematics, the Kabbalah, and the Search for Infinity* (New York: Four Walls Eight Windows).

← . 2004. *Chance: A Guide to Gambling, Love, the Stock Market, and Just about Everything Else* (New York: Thunder's Mouth Press).

← . 2005. *Descartes Secret Notebook* (New York: Broadway Books). Adam, C şi Tannery, P., editori. 1897 – 1910. *Oeuvres des Descartes.* Ediţie revăzută 1964 – 76 (Paris: Vrin/CNRS). Cea mai cuprinzătoare traducere în engleză este Cottingham, J., Stoothoff, R. şi Murdoch, D., editori. 1985. *The Philosophical Writing of Descartes* (Cambridge: Cambridge University Press).

Adams, C. 1994. *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots* (New York: W.H. Freeman).

Alexander, J.W. 1928. *Transactions of the American Mathematical Society,* 30, 275.

Applegate, D.L., Bixby, R.E., Chvătal, V. şi Cook, W.J. 2007. *The Traveling Salesman Problem* (Princeton: Princeton University Press).

Archibald, R.C. 1914. *American Mathematical Society Bulletin,* 20, 409. Aristotel. cca. 350 î.Hr. *Metaphysics.* În Barnes, J., editor 1984. *The Complete Works of Aristotle* (Princeton: Princeton University Press).

← . cca. 330 î.Hr. a. *Physics.* Traducere de R.P. Hardie şi R.K. Gaye.http://people. bu.edu/wwildman/Weird Wild Web/courses/wphil/readings/ wphilrdg07 physicsentire.htm (traducere în engleză din domeniul public).

← . cca. 330 î.Hr. b. *Physics.* Traducere de P.H. Wickstead şi F.M. Cornford.

1960 (Londra: Heinemann).

Aronoff, M. şi Rees-Miller, J. 2001. *The Handbook of Lingvistics* (Oxford: Blackwell Publishing).

Ashley, C.W. 1944. *The Ashley Book of Knots* (New York: Doubleday).

Atiyah, M. 1989. *Publications Mathématiques de I'Inst. des Hautes Études Scientifiques,* Paris, 68, 175.

← . 1990. *The Geometry and Physics of Knots* (Cambridge: Cambridge University Press).

← . 1993. *Proceedings of the American Philosophical Society,* 137 (4), 517.

← . 1994. *Supplement to Royal Society News,* 7, (12), (I).

← . 1995. *Times Higher Education Supplement,* 29 Septembrie.

Baillet, A. 1691. *La Vie deM. descartes* (Paris: Daniel Horthemels). Facsimilele au fost publicate în 1972 (Hildesheim: Olms) şi 1987 (New York: Garner).

Balz, A.G.A. 1952. *Descartes and the Modern Mind* (New Haven: Yale University Press).

Barrow, J.D. 1992. *Pi in the Sky: Counting, Thinking, and Being* (Oxford: Clarendon Press).

← . 2005. *The Infinite Book: A Short Guide to the Boundless, Tuneless and Endless* (New York: Pantheon). (Ediţia românească: Barrow, *Cartea infinitului,* Humanitas, Bucureşti, 2009.)

Beaney, M. 2003. În Griffin, N., editor *The Cambridge Companion to Bertrand Russell* (Cambridge: Cambridge University Press).

Bell, E.T. 1937. *Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré* (New York: Touchstone).

← . 1940. *The Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill).

← . 1951. *Mathematics: Queen and Servant of Science* (New York: McGraw Hill).

Beltrán Mari, A. 1994. „Introduction". În Galilei, G. *Diálogo Sobre Ios Dos Máximos Sistemas del Mundo* (Madrid: Alianza Editorial).

Bennett, D. 2004. *Logic Made Easy: How to Know When Language Deceives You* (New York: W.W. Norton).

Berkeley, G. 1734. „The Analyst: Or a Discourse

Addressed to an Infidel Mathematician", D.R. Wilkins, ed. http:///www.maths. ted.ie/pub/ Hist Math/ People/Berkeley/Analyst/Analyst.html

Berliński, D. 1996. *A Tour of the Calculus* (New York: Pantheon Books).

Bernoulli, J. 1713 a, *The Art of Conjecturing [Ars Conjectândi].* Traducere de E.D. Sylla, cu introducere şi note, 2006 (Baltimore: John's Hopkins University Press).

← . 1713 b. *Ars Conjectândi* (Basel: Tharnisiorum).

Beyssade, M. 1993. „The Cogito". În Voss, S., editor, *Essays on the Philosophy and Science of René Descartes* (Oxford: Oxford University Press).

Black, F. şi Scholes, M. 1973. *Journal of Political Economy,* 81 (3), 637.

Bodanis, D. 2000. *E = mc²: A Biography of the World's Most Famous Equation* (New York: Walker).

Bonola, R. 1955. *Non-Euclidean Geometry.* Traducere de H.S. Carshaw (New York: Dover Publications). Aceasta este reeditarea traducerii din 1912 (Chicago: Open Court Publishing Company).

Boole, G. 1847. *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning.* În Ewald, W. 1996. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics (*Oxford: Clarendon Press).

← . 1854. *An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (London: Macmillan). Retipărit 1958 (Mineola, N.Y.: Dover Publications).

Boolos, G. 1985. *Mind,* 94, 331.

← . 1999. *Logic, Logic, Logic* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Borovik, A. 2006. *Mathematics under the Microscope.* http://www.maths.

manchester.ac.uk/%7 Eavb/micromathematics/downloads

Brewster, D. 1831. *The Life of Sir Isaac Newton* (Londra: John Murray, Albemarle Street).

Bukowski, J. 2008. *The Collège Mathematics Journal,* 39 (1), 2.

Burger, E.B. şi Starbird, M. 2005. *Coincidences, Chaos, and All That Math Jazz: Making Light of Weighty Ideas* (New York: W.W. Norton).

Burkert, W. 1972. *Lore and Science în Ancient Pythagoreanism* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Cajori, F. 1926. *The American Mathematical Monthly,* 33 (8), 397.

← . 1928. În The History of Science Society. *Sir Isaac Newton 1727 – 1927: A Bicentenary Evaluation of His Work* (Baltimore: The Williams & Wilkins Company).

Cardano, G. 1545. *Artis Magnae, sive de regulis algebraices.* Publicat în 1968 sub titlul *The Great Art or the Rules of Algebra,* traducere de T.R. Witmer (Cambridge, Mass.: MIT Press).

Caspar, M. 1993. *Kepler.* Traducere de C.D. Hellman (Mineola, N.Y.: Dover Publications).

Chandrasekhar, S. 1995. *Newton's „Principia" for the Common Reader* (Oxford: Clarendon Press).

Changeux, J.-P. şi Connes, A. 1995. *Conversations on Mind, Matter, and Mathematics* (Princeton: Princeton University Press).

Cherniss, H. 1945. *The Riddle of the Early Academy* (Berkeley: University of California Press). Retipărit 1980 (New York: Garland).

← . 1951. *Review of Metaphysics,* 4, 395.

Chomsky, N. 1957. *Syntactic Structures* (The Hague: Mouton & Co.).

Cicero secolul I î.Hr. *Discussion at Tusculam* [tradus uneori ca *Tusculan Disputations*], în Grant, M., traducere 1971. *Cicero: On the Good Life* (Londra: Penguin Classics).

Clark, M. 2002. *Paradoxes from A to Z* (Londra: Routledge).

Clarke, D.M. 1992. În Cottingham, J., editor *The Cambridge Companion to Descartes* (Cambridge: Cambridge University Press).

Cohen, I.B. 1982. În Bechler, Z., editor *Contemporary Newtonian Research* (Dordrecht: Reidel).

— 2006. *The Triumph of Numbers* (New York: W.W. Norton & Company).

Cohen, PL. 1966. *Set Theory and the Continuum Hypothesis* (New York: W.A. Benjamin).

Cole, J.R. 1992. *The Olympian Dreams and Youthful Rebellion of René Descartes* (Champaign University of Illinois Press).

Connor, J.A. 2006. *Pascal's Wager: The Man Who Played Dice with God* (New York: HarperCollins).

Conway, J.H. 1970. În Leech, J., ed. *Computational Problems în Abstract Algebra* (Oxford: Pergamon Press).

Coresio, G. 1612. *Operetta intorno al galleggiare de corpi solidi.* Retipărit în Favaro, A. 1968. *Le Opere di Galileo Galilei.* Edizione Nazionale (Florenţa: Barberá).

Cottingham, J. 1986. *Descartes* (Oxford: Blackwell).

Craig, Sir J. 1946. *Newton at the Mint* (Cambridge: Cambridge University Press).

Curley, E. 1993. În Voss, S., ed. *Essays on the Philosophy and Science of René Descartes* (Oxford: Oxford University Press).

Curzon, G. 2004. *Wotton and His Words: Spying, Science and Veneţian intrigues* (Philadelphia: Xlibris Corporation).

Davies, P. 2001. *How to Build a Time Machine* (New York: Allen Lane).

Davis, PL. şi Hersh, R. 1981. *The Mathematical Experience* (Boston: Birkhaüser). Ediţie revăzută 1998 (Boston: Mariner Books).

Dawkins, R. 2006. *The God Delusion* (New York: Houghton Mifflin Company).

Dawson, J. 1997. *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Godel* (Natick, Mass: A.K. Peters).

De Morgan, A. 1885. *Newton: His Friend: and His Niece* (Londra: Elliot Stock).

De Santillana, G. 1955. *The Crime of Galileo* (Chicago: University of Chicago Press).

Dehaene, S. 1997. *The Number Sense* (Oxford: Oxford University Press).

Dehaene, S., Izard, V., Pica, P., şi Spelke, E. 2006. *Science,* 311, 381.

Delong, H. 1970. *A Profile of Mathematical Logic* (Reading, Mass.: Addison-Wesley). Republicat 2004 (Mineola, N.Y.: Dover Publications).

Demopoulos, W. şi Clark, P. 2005. În Shapiro, S., editori *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (Oxford: Oxford University Press).

Dennett, D.C. 2006. *Breaking the Spell: Religion as a Natural Phenomenon* (New York: Viking).

Descartes, R. 1637 a. *Discourse on Method, Optics, Geometry, and Meteorology.* Traducere de PL. Olscamp, 1965 (Indianapolis: The Bobbs-Merrill Company).

← . 1637 b. 1954. *The Geometry of René Descartes.* Traducere de D.E. Smith şi M.L. Latham, 1954 (Mineola, N.Y.: Dover Publications).

← . 1644. *Principles of Philosophy,* îi 64. În Cottingham, J., Stoothoff, R. şi Murdoch, D., editori. 1985. *Philosophical Works of Descartes (*Cambridge: Cambridge University Press).

← . 1637 – 1644 *The Philosophy of Descartes: Containing the Method, Meditations, and Other Works.* Traducere de J. Veitch, 1901 (New York: Tudor Publishing).

Detlefsen, M. 2005. În Shapiro, S., editor *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (Oxford: Oxford University Press).

Deutsch, D. 1997. *The Fabric of Reality* (New York: Allen Lane).

Devlin, K. 1993. *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory,* ediţia a doua (New York: Springer-Verlag).

← . 2000. *The Math Gene: How Mathematical Thinking Evolved and Why Numbers Are like Gossip* (New York: Basic Books).

Dijksterhuis, E.J. 1957. *Archimedes* (New York: The Humanities Press).

Doxiadis, A.K. 2000. *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture* (New York: Bloomsbury). (Ediţia românească: Doxiadis, *Unchiul Pedros şi conjectura lui Goldbach,* Humanitas, Bucureşti, 2005.)

Drake, S. 1978. *Galileo at Work: His Scientific Biography* (Chicago: University of Chicago Press).

← . 1990. *Galileo: Pioneer Scientist* (Toronto: University of Toronto Press).

Dummett, M. 1978. *Truth and Other Enigmas* (Cambridge, Mass.: Harvard

University Press).

Dunham, W. 1994. *The Mathematical Universe: An Alphabetical Journey through the Great Proofs, Problems and Personalities* (New York: John Wiley & Sons).

Durmington, G.W. 1955. *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science* (New York: Hafner Publishing).

Du Sautoy, M. 2008, *Symmetry: A Journey into the Patterns of Nature* (New York: Harper Collins).

Einstein, A. 1934. „Geometrie und Erfahrung". În *Mein Weltbild* (Frankfurt am Main: Ullstein Materialien).

Ewald, W. 1996. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* (Oxford: Clarendon Press).

Favaro, A., editor 1890 – 1909. *Le Opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale* (Florenţa: Barberá). Au existat mai multe ediţii, cea mai recentă din 1964 – 66. Textul poate fi găsit la adresa http://www.imss.fi.it/instituto/ index.html

Feamley-Sander, D. 1979. *The American Mathematical Monthly,* 86 (10), 809.

← . 1982. *The American Mathematical Monthly,* 89 (3), 161.

Feldberg, R. 1995. *Galileo and the Church: Political Inquisition or Critical*

Dialogue (Cambridge: Cambridge University Press).

Ferris, T. 1997. *The Whole Shebang* (New York: Simon & Schuster). Finkel, B.F. 1898. „Biography: René Descartes".*American Mathematical Monthly,* 5 (8 – 9), 191.

Fisher, R.A. 1936. *Annals of Science,* 1, 115.

← . 1956. În Newman, J.R., editor *The World of Mathematics* (New York: Simon & Schuster).

Fowler, D. 1999. *The Mathematics of Plato's Academy* (Oxford: Clarendon Press).

Franzén, T. 2005. *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse* (Wellesley, Mass.: A.K. Peters).

Frege, G. 1879. *Begriffsschrift, cine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (Halle, Germany: L. Nebert). Traducere de S. Bauer-Mengelberg în van Heijenoort, J., ed. 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book în Mathematical Logic* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

← . 1884. *Der Grundlagen der Arithmetik* (Breslau: Koebner). Traducere de J.L. Austin, 1974. *The Foundations of Arithmetic* (Oxford: Basil Blackwell).

← . 1893. *Grundgesetze der Arithmetik,* volumul I (Jena: Verlag Hermann Pohle). Parţial tradusă în 1964, în Furth, M., editor *The Basic Laws of Arithmetic* (Berkeley: University of California Press).

← . 1903. *Grundgesetze der Arithmetik,* volumul II (Jena: Verlag Hermann Pohle).

Fritz, K. von 1945. „The Discovery of Incommensurability by Hipposus of Metapontum". *Annals of Mathematics,* 46, 242.

Frova, A. şi Marenzana, M. 1998. *Thus Spoke Galileo: The Great Scientist's Ideas and Their Relevance to the Present Day.* Traducere de J. McManus, 2006 (Oxford: Oxford University Press).

Galilei, G. 1586. *The Little Balance.* În *Galileo and the Scientific Revolution.* Traducere de L. Fermi şi G. Bernardini. (New York: Basic Books). Aceasta e o traducere după Favaro, A., editor 1890 – 1909. *Le Opere di Galileo Galilei* (Florenţa: G. Barberá).

← . cca. 1600 a. *On Mechanics.* Traducere de S. Drake, 1960 (Madison: University of Wisconsin Press).

← . cca. 1600 b. *On Motion.* Traducere de I.E. Drabkin, 1960 (Madison: University of Wisconsin Press).

← . 1610 a. *Sidereal Nuncius, or The Sidereal Messenger.* Traducere de A. Van Helden, 1989. (Chicago: University of Chicago Press).
← . 1610 b. *The Sidereal Messenger [Sidereus Nuncius]*. În Drake, S. 1983. *Telescopes, Tides and Tactics* (Chicago: University of Chicago Press).
← . 1623. *The Assayer [Il Saggiatoare].* În *The Controversy on the Comets of 1618.* Traducere de S. Drake şi C.D. O'Malley, 1960 (Philadelphia: University of Pennsylvania Press).
← . 1632. *Dialogue Concerning the Two Chief World Sistems.* Traducere de S. Drake, 1967 (Berkeley: University of California Press).
← . 1638. *Discourses on the Two New Sciences.* Traducere de S. Drake, 1974 (Madison: University of Wisconsin Press).

Garber, D. 1992. În Cottingham, J., editor *The Cambridge Companion to Descartes* (Cambridge: Cambridge University Press).

Gardner, M. 2003. *Are Universes Thicker than Blackberries?* (New York: W.W. Norton).

Gaukroger, S. 1992. În Cottingham, J., editor *The Cambridge Companion to Descartes* (Cambridge: Cambridge University Press).
← . 2002. *Descartes's Sistem of Natural Philosophy* (Cambridge: Cambridge University Press).

Gingerich, O. 1973. „Kepler, Johannes". În Gillespie, C.C. editor*Dictionary of Scientific Biography,* vol. 7 (New York: Scribners).

Girifalco, L.A. 2008. *The Universal Force* (Oxford: Oxford University Press).

Glaisher, J.W.L. 1888. „Bicentenary Address", *Cambridge Chronicle,* 20 aprilie, 1888.

Gleick, J. 1987. *Chaos: Making a New Science* (New York: Viking).
← . 2003. *Isaac Newton* (New York: Vintage Books).

Glücker, J. 1978. *Antiochus and the Late Academy,* hypomnemata 56 (Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht).

Godel, K. 1947). În Benaceroff, P. şi Putnam, H., editori 1983. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings,* ediţia a doua (Cambridge: Cambridge University Press).

Godwin, M. şi Irvine, A.D. 2003. În Griffin, N., editor *The Cambridge Companion to Bertrand Russell* (Cambridge: Cambridge University Press).

Goldstein, R. 2005. *Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Godel* (New York: W.W. Norton).

Gosling, J.C.B. 1973. *Plato* (Londra: Routledge & Kegan Paul).

Gott. J.R. 2001. *Time Travel în Einstein's Universe* (Boston: Houghton Mifflin).

Grassi, O. 1619. *Libra Astronomică ac Philosophica.* În Drake, S. şi O'Malley, C.D., traducători 1960. *The Controversy on the Comets of 1618* (Philadelphia: University of Pennsylvania Press).

Grăunt, J. 1662. *Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index, and Made Upon the Bills of Mortality* (Londra: Tho. Roycroft).

Gray, J.J. 2004. *János Bolyai, Non-Euclidean Geometry, and the nature of Space* (Cambridge, Mass.: Bumdy Library).

Grayling, A.C. 2005. Descartes: *The Life and Times of a Genius* (New York: Walker & Company).

Greenberg, M.J. 1974. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History,* ediţia a treia (New York: W.H. Freeman and Company).

Greene, B. 1999. *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory* (New York: W.W. Norton). (Ediţia românească: Greene, *Universul elegant,* Humanitas, Bucureşti, 2009.)

— 2004. *The Fabric of the Cosmos: Space, Time, and the Texture of Reality* (New York: Alfred A. Knopf).

Gross, D. 1988. *Proceedings of the National Academy of Sciences* (USA), 85, 8371.

Guthrie, K.S. 1987. *The Pythagorean Sourcebook and Library: An Anthology of Ancient Writings which Relate to*

Pythagoras and Pythagorean Philosophy (Grand Rapids, Mich.: Phanes Press).

Hald, A. 1990. *A History of Probability and Statistics and Their Applications Before 1750* (New York: John Wiley & Sons).

Hall, A.R. 1992. *Isaac Newton: Adventurer în Thought* (Oxford: Blackwell). Retipărit în 1996 (Cambridge: Cambridge University Press).

Hamilton, E. şi Cairns, H., editori 1961. *The Collected Dialogues of Plato* (New York: Pantheon).

Hamming, R.W. 1980. *The American Mathematical Monthly,* 87 (2), 81.

Hankins, F.H. 1908. *Adolphe Quetelet as Statistician* (New York: Columbia University). Postat online de R.E. Wyllys la http://www.gslis. utexas.edu/-wyllys/Quetelet Resources/index.html

Hardy, G.H. 1940. *A Mathematician's Apology* (Cambridge: Cambridge University Press).

Havelock, E. 1963. *Preface to Plato* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Hawking, S. 2005. *God Created the Integers: The Mathematical Breakthroughs that Changed History* (Philadelphia: Running Press).

Hawking, S., editor 2007. *A Stubbomly Persistent Illusion: The Essential Scientific Writings of Albert Einstein* (Philadelphia: Running Press).

Hawking, S. şi Penrose, R. 1996. *the nature of Space and Time* (Princeton: Princeton University Press).

Heath, T.L. 1897. *The Works of Archimedes* (Cambridge: Cambridge University Press).

Heath, T. 1921. *A History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon Press). Republicat în 1981 (New York: Dover Publications).

Hedrick, P.W. 2004. *Genetics of Populations* (Sudbury, Mass.: Jones & Bartlett).

Heiberg, J.L., editor 1910 – 15. *Archimedes Opera Omnio cum Commentarees Eutocii* (Leipzig); text în greaca şi traducere în latina.

Hellman, H. 2006. *Great Feuds în Mathematics: Ten of the Liveliest Disputes Ever* (Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons).

Hermite, C. 1905. *Correspondence d'Hermite et de Stieltjes* (Paris: Gauthier-Villars).

Herodot. 440 î.Hr. *The History,* cartea III. Traducere de D. Greve, 1988 (Chicago: University of Chicago Press).

Hersh, R. *2000.18 Un convenţional Essays on the nature of Mathematics* (New York: Springer).

Herz-Fischler, R. 1998. *A Mathematical History of the Golden Number* (Mineola, N.Y.: Dover Publications).

Hobbes, T. 1651. *Leviathan.* Reeditat în 1982 (New York: Penguin Classics).

Hockett, C.F. 1960. *Scientific American,* 203 (septembrie), 88.

Hoffe, O. 1994. *Immanuel Kant.* Traducere de M. Farrier (Albany, N.Y.: SUNY Press).

Hofstadter, D. 1979. *Godel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* (New York: Basic Books).

Holden, C. 2006. *Science,* 311, 317.

Huffman, C.A. 1999. În Long, A.A., editor *The Cambridge Companion to Early Greek Philosophy* (Cambridge: Cambridge University Press).

Huffman, C. 2006. „Pythagoras". În *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* http://plato.stanford.edu/entries/pythagoras

Hume, D. 1748. *An Enquiry Concerning Human Understanding.* Republicat în 2000 în *The Clarendon Edition of the Works of David Hume,* editat de T.L. Beauchamp (Oxford: Oxford University Press).

Iamblichos. cca. 300 d. Cr.a. *Iamblichus Life of Pythagoras.* Traducere de T. Taylor, 1986 (Rochester, Vt.: Inner Traditions).

— Cea 300 d. Cr.b. *On the Pythagorean Life.* Traducere de J. Dillon şi J. Hershbell. (Atlanta: Scholar Press).

Irvine, A.D. 2003. „Russell's Paradox". În *Stanford Encyclopedia of Philosophy,* http://plato.

stanford.edu/entries/russell-paradox

Isaacson, W. 2007. *Einstein: His Life and Universe* (New York: Simon & Schuster).

Jaeger, M. 2002. *The Journal of Roman Studies,* 92, 49.

Jeans, J. 1930. *The Mysterious Universe* (Cambridge: Cambridge University Press).

Jones, V.F.R. 1985. *Bulletin of the American Mathematical Society,* 12, 103.

Joost-Gaugier, C.L. 2006. *Measuring Heaven: Pythagoras and His Influence on Thought and Art în Antiquity and the Middle Ages* (Ithaca: Cornell University Press).

Kaku, M. 2004. *Einstein's Cosmos* (New York: Atlas Books).

Kant, I. 1781. *Critique of Pure Reason.* Una dintre numeroasele traduceri în engleză este Müller, F.M. 1881. *Immanuel Kant's Critique of Pure Reason* (Londra: Macmillan).

Kaplan, M. şi Kaplan, E. 2006. *Chances Are: Adventures în Probability* (New York: Viking).

Kapner, D.J., Cook, T.S., Adelberger, E.G., Gundiach, J.H., Heckel, B.R., Hoyle, C.D. şi Swanson, H.E. 2007. *Physical Review Letters,* 98, 021101.

Kasner, E. şi Newman, J.R. 1989. *Mathematics and the Imagination* (Redmond, Wash.: Tempus Books).

Kauffman, L.H. 2001. *Knots and Physics,* ediţia a treia (Singapore: World Scientific).

Keeling, S.V. 1968. *Descartes* (Oxford: Oxford University Press).

Kepler, J. 1981. *Mysterium Cosmographicum* (New York: Abaris Books).

← . 1997. *The Harmony of the World* (Philadelphia: American Philosophical Society).

Klessinger, N., Szczerbiński, M. şi Varley, R. 2007. *Neuropsychologia,* 45, 1642.

Kline, M. 1967. *Mathematics for Liberal Arts* (Reading, Mass.: Addison-Wesley). Republicat în 1985 ca

Mathematics for the Nonmathematicians (New York: Dover Publications).

← . 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Oxford: Oxford University Press).

Knott, C.G. 1911. *Life and Scientific Work of Peter Guthrie Tait* (Cambridge: Cambridge University Press).

Koyre, A. 1978. *Galileo Studies.* Traducere de J. Mepham (Atlantic Highlands, N.J.: Humanities Press).

Kramer, M., Stairs, I.H., Manchester, R.N. *etal.* 2006. *Science,* 314 (5796), 97.

Krauss, L. 2005. *Hiding in the Mirror: The Mysterious Allure of Extra Dimensions, from Plato to Strâng Theory and Beyond* (New York: Viking Penguin).

Kraut, R. 1992. *The Cambridge Companion to Plato* (Cambridge: Cambridge University Press).

Krüger, L. 1987. În Krüger, L., Daston, L.J. şi Heidelberger, M., editori *The Probabilistic Revolution,* (Cambridge, Mass.: The MIT Press).

Kuehn, M. 2001. *Kant: A Biography* (Cambridge: Cambridge University Press).

Laertios, D. cca. 250 d.Hr. *Lives of Eminent Philosophers.* Traducere de R.D. Hicks, 1925 (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Lagrange, J. 1797. *Théorie des Fonctions Analytiques* (Paris: Imprimerie de la République).

Lahanas, M. „Archimedes and his Burning Mirrors". www.mlahanas.de/ Greeks/Mirrors.htm

Lakoff, G. şi Nünez, R.E. 2000. *Where Mathematics Comes From* (New York: Basic Books).

Laplace, P.S., Marquis de 1814. *A Philosophical Essay on Probabilities.* Traducere de F.W. Truscot şi F.L. Emory, 1902 (New York: John Wiley & Sons). Republicat în 1995 (Mineola, N.Y.: Dover).

Lecar, M., Franklin, F.A., Holman, M.J. şi Murray, N.W. 2001. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics,* 39, 581.

Lightman, A. 1993. *Einstein's Dreams* (New York: Pantheon Books).

Little, C.N. 1899. *Transaction of the Royal Society of Edinburgh,* 39 (partea a III-a), 771.

Livio, M. 2002. *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number* (New York: Broadway Books). (Ediţia românească: Livio, *Secţiunea de aur,* Humanitas, Bucureşti, 2006.)

— 2005. *The Equation That Couldn't Be Solved* (New York: Simon & Schuster). (Ediţia românească: Livio, *Ecuaţia care nu a putut fi rezolvată,* Humanitas, Bucureşti, 2008.)

Lottin, J. 1912. *Quetelet: Staticien et Sociologue* (Louvain: Institut Supérieur de Philosophie).

MacHale, D. 1985. *George Boole: His Life and Work* (Dublin: Boole Press Limited).

Machamer, P. 1998. În Machamer, P., editor *The Cambridge Companion to Galileo* (Cambridge: Cambridge University Press).

Manning, H.P. 1914. *Geometry of Four Dimensions* (Londra: Macmillan). Republicat în 1956 (New York: Dover Publications).

Maor, E. 1994. *The Story of a Number* (Princeton: Princeton University Press).

McMullin, E. 1998. În Machamer, P., editor *The Cambridge Companion to Galileo* (Cambridge: Cambridge University Press).

Mekler, S., editor, 1902. *Academicorum Philosophorum Index Herculanensis* (Berlin: Weidmann).

Menasco, W., şi Rudolph, L. 1995. *American Scientist,* 83 (ianuarie-febmarie), 38.

Mendel, G. 1865. „Experiments în Plant Hybridization", http://www.mendelweb.org/Mendel.plain.html

Merton, R.K. 1993. *On the Shoulders of Giants: A Shandean Postscript* (Chicago: University of Chicago Press).

Messer, R. şi Ştraffin, P. 2006. *Topology Now* (Washington, D.C.: Mathematical Association of America).

Miller, V.R. şi Miller, R.P. editori, 1983. *Descartes,*

Principles of Philosophy (Dordrecht: Reidel).

Mitchell, J.C. 1990. În van Leeuwen, J., *Handbook of Teoretical Computer Science* (Cambridge, Mass.: MIT Press).

Monk, R. 1990. *Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius* (Londra: Jonathan Cape).

Moore, G.H. 1982. *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence* (New York: Springer-Verlag).

Morgenstern, O. 1971. Draft „Memorandum from Mathematica". Subiect: History of the naturalization of Kurt Godel. Institute for Advanced Study, Princeton, NJ.

Morris, T. 1999. *Philosophy for Dummies* (Foster City, Calif.: IDG Books).

Motte, A. 1729. *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His Sistem of the World.* Revizuita de F. Cajori, 1947 (Berkeley: University of California Press). Apare de asemenea ca Newton, I. 1995, *The Principia* (New York: Prometheus Books).

Mueller, I. 1991. În Bowen, A., ed. *Science and Philosophy în Classical Greece* (Londra: Garland).

← . 1992. În Kraut, R., editor *The Cambridge Companion to Plato* (Cambridge: Cambridge University Press).

← . 2005. În Koetsier, T. şi Bergmans, L., editori *Mathematics and the Divine: A Historical Study* (Amsterdam: Elsevier).

Nagel, E. şi Newman, J. 1959. *Godel's Proof* (New York: Routledge & Kegan Paul). Republicat în 2001 (New York: New York University Press).

Netz, R. 2005. În Koetsier, T. şi Bergmans, L., editori *Mathematics and the Divine: A Historical Study* (Amsterdam: Elsevier).

Netz, R. şi Noel, W. 2007. *The Archimedes Codex: How a Medieval Prayer Book Is Revealing the True Genius of Antiquity's Greatest Scientist* (Philadelphia: Da Capo Press).

Neuwirth, L. 1979. *Scientific American,* 240 (iunie), 110.

Newman, J.R. 1956. *The World of Mathematics* (New York: Simon & Schuster).

Newton, Sir I. 1730. *Opticks, or A Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light,* ediţia a IV-a (Londra: G. Bell). Republicat în 1952 (New York: Dover Publications).

Newton, Sir I. 1729. *Mathematical Principles of Natural Philosophy.* Traducere de I.B. Cohen şi A. Whitman, 1999 (Berkeley: University of California Press).

Nicolson, M. 1935. *Modern Philology,* 32 (3), 233.

O'Connor, J.J. şi Robertson, E.F. 2003. „Peter Guthrie Tait". http://www.history. mes. st-andrews.ac.uk/Biographies/ Tait.html.

← . 2005. „Hermann Günter Grassmann". http://www-history. mes. standrews.ac.uk/Biographies/Grassmann.html

← . 2007. „G.H. Hardy Addresses the British Association in 1922, part 1". http://www-history. mes. st-andrews.ac.uk/Extras/ BAL 9221.html

Obler, L.K. şi Gjerlow, K. 1999. *Language and the Brain* (Cambridge: Cambridge University Press).

Odom, B., Hanneke, D., D'Urso, B. şi Gabrielse, G. 2006. *Physical Review Letters,* 97, 030801.

Ooguri, H. şi Vafa, C. 2000. *Nuclear Physics B,* 577, 419.

Orel, V. 1996. *Gregor Mendel: The First Geneticist* (New York: Oxford University Press).

Overbye, D. 2000. *Einstein în Love: A Scientific Romance* (New York: Viking).

País, A. 1982. *Subtle Is the Lord: The Science and Life of Albert Einstein* (Oxford: Oxford University Press).

Panek, R. 1998. *Seeing and Believing: How the Telescope Opened Our Eyes and Minds to the Heavens* (New York: Viking).

Paulos, J.A. 2008. *Irreligion: A Mathematician Explains Why the Arguments for God Just Don't Add Up* (New York: Hill and Wang).

Penrose, R. 1989. *The Emperor's New Mind:*

Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics (Oxford: Oxford University Press).

← . 2004. *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe* (London: Jonathan Cape).

Perko, K.A., Jr. 1974. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 45, 262.

Peste, P. 2007. *Beyond Geometry: Classic Papers from Riemann to Einstein* (Mineola, N.Y.: Dover Publications).

Peterson, I. 1988. *The Mathematical Tourist: Snapshots of Modern Mathematics* (New York: W.H. Freeman and Company).

Petsche, J.-J. 2006. *Grassmann* (Basel: Birkhäuser Verlag).

Pinker, S. 1994. *The Language Instinct* (New York: William Morrow and Company).

Platon. cca. 360 î.Hr. *The Republic.* Traducere de A. Bloom, 1968 (New York: Basic Books).

Plutarh. cca. 75 d.Hr. „Marcellus". Traducere de J. Dryden. În Clough, A.H., editor 1992. *Plutarch's Lives* (New York: Modern Library).

Poincaré, H. 1891. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées* 2, 769. Articolul publicat în traducere engleză în Peşte, P., 2007. *Beyond Geometry.*

Porphyrios. cca. 270 d.Hr. *Life of Pythagoras.* În Hadas, M. şi Smith, M., editori 1965. *Heroes and Gods* (New York: Harper and Row).

Proclus. cca. 450. *Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's „Elements".* Traducere de G. Morrow, 1970 (Princeton: Princeton University Press).

Przytycki, J.H. 1992. Aportaciones Matemáticas Comunicaciones, 11, 173.

Putnam, H. 1975. *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers,* vol. 1 (Cambridge: Cambridge University Press), 60.

Quetelet, L.A.J. 1828. *Instructions Populaires sur le Calcul des Probabilités* (Bruxelles: H. Tarbier & M. Hayez).

Quine, W.V.O. 1966. *The Ways of Paradox and Other*

Essays (New York: Random House).

Quine, W.V. 1982. *Methods of Logic,* ediţia a patra. (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Radelet de Grave, P., editor 2005. „Bernoulli-Edition". http://www.ub. unibas.ch/spez/bernoull.htm

Ramachandran, V.S. şi Blakeslee, S. 1999. *Phantoms of the Brain* (New York: Quill).

Randall, L. 2005. *Warped Passages: Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions* (New York: Ecco).

Raskin, J. 1998. „Efectiveness of Mathematics". http://jef. raskincenter.org/unpublished/efectivenessmathematics.html

Raymond, E.S. 2005. „The Utility of Mathematics". http://www.cath.org/-esr/writings/utility-of-math

Redondi, P. 1998. În Machamer, P. *The Cambridge Companion to Galileo* (Cambridge: Cambridge University Press).

Rees, M.J. 1997. *Before the Begining* (Reading, Mass.: Addison-Wesley).

Reeves, E. 2008. *Galileo's Glassworks: The Telescope and the Mirror* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Renon, L. şi Felliozat, J. 1947. *L'Inde Classique: Manuel des Études Indiennes* (Paris: Payot).

Rescher, N. 2001. *Paradoxes: Their Roots, Range, and Resolution* (Chicago: Open Court).

Resnik, M.D. 1980. *Frege and the Philosophy of Mathematics* (Ithaca: Cornell University Press).

Reston, J. 1994. *Galileo: A Life* (New York: HarperCollins).

Ribenboim, P. 1994. *Catalan's Conjecture* (Boston: Academic Press).

Ricoeur, P. 1996. *Synthèse,* 106, 57.

Riedweg, C. 2005. *Pythagoras: His Life and Influence.* Traducere de S. Rendall (Ithaca: Cornell University Press).

Rivest, R., Shamir, A. şi Adleman, L. 1978. *Communications of the Association for Computing Machinery,* 21 (2), 120.

Rodis-Lewis, G. 1998. *Descartes: His Life and Thought* (Ithaca: Cornell University Press).

Ronan, M. 2006. *Symmetry and the Monster: The Story of One of the Greatest Quests of Mathematics* (New York: Oxford University Press).

Rosenthal, J.S. 2006. *Struck by Lightning: The Curious World of Probabilities* (Washington, D.C.: Joseph Henry Press).

Ross, W.D. 1951. *Plato's Theory of Ideas* (Oxford: Clarendon Press).

Rouse Ball, W.W. 1908. *A Short Account of the History of Mathematics,* ediţia a IV-a. Reeditat în 1960 (Mineola, N.Y.: Dover Publications).

Rucker, R. 1995. *Infinity and the Mind: The Science and Philosophy of the Infinite* (Princeton: Princeton University Press).

Russell, B. 1912. *The Problems of Philosophy* (Londra: Home University Library). Reeditat în 1997 de Oxford University Press (Oxford).

← . 1919. *Introduction to Mathematical Philosophy* (Londra: George Allen and Unwin). Reeditat în 1993 de J. Stater (Londra: Routledge). Reeditat în 2005 (New York: Barnes & Noble).

← . 1945. *History of Western Philosophy.* Reeditat în 2007 (New York: Touchstone).

Sainsbury, R.M. 1988. *Paradoxes* (Cambridge: Cambridge University Press).

Sarrukai, S. 2005. *Current Science,* 88 (3), 415.

Schmitt, C.B. 1969. „Experience and Experiment: A Comparison of Zabarella's Views with Galileo'se în *de Motu". Studies in the Renaissance,* 16, 80.

Sedgwick, W.T. şi Tyler, H.W. 1917. *A Short History of Science* (New York: The Macmillan Company).

Shapiro, S. 2000. *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics* (Oxford: Oxford University

Press).

Shea, W.R. 1972. *Galileo's Intellectual Revolution: Middle Period, 16101632* (New York: Science History Publications).

← . 1998. În Machamer, P., editor *The Cambridge Companion to Galileo* (Cambridge: Cambridge University Press).

Sieg, W. 1988. „Hilbert's Program Sixty Years Later". *Journal of Symbolic Logic*, 53, 349.

Smolin, L. 2001. *Three Roads to Quantum Gravity* (New York: Basic Books). (Ediţia românească: Smolin, *Spaţiu, timp, univers,* Editura Humanitas, Bucureşti, 2003.)

← . 2006. *The Trouble with Physics: The rise of Strâng Theory, The Fall of Science, and What Comes Next* (Boston: Houghton Mifflin).

Sobel, D. 1999. *Galileo's Daughter* (New York: Walker & Company).

Sommerville, D.M.Y. 1929. *An Introduction to the Geometry of NDimensions* (Londra: Mathuen).

Sorell, T. 2005. *Descartes Reinvented* (Cambridge: Cambridge University Press).

Sørensen, R. 2003. *A Brief History of the Paradox: Philosophy and the Labyrinths of the Mind* (Oxford: Oxford University Press).

Sossinsky, A. 2002. *Knots: Mathematics with a Twist* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Stanley, T. 1687. *The History of Philosophy,* secţiunea a IX-a. Publicat în 1970 ca facsimil sub titlul *Pythagoras: His Life and Teachings* (Los Angeles: The Philosophical Research Society).

Steiner, M. 2005. În Shapiro, S., editor *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (Oxford: Oxford University Press).

Stewart, I. 2004. *Galois Theory* (Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall/CRC).

← . 2007, *Why Beauty Is Truth: A History of Symmetry* (New York: Perseus Books). (Ediţia românească:

Stewart, *De ce frumuseţea este adevărul,* Humanitas, Bucureşti, 2010.)

Stewart, J.A. 1905. *The Myths of Plato* (London: MacMillan and Co.).

Stigler, S.M. 1997. În *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, Mémoires,* 8 (3), 47.

Strohmeier, J. şi Westbrook, P. 1999. *Divine Harmony* (Berkeley, Calif.: Berkeley Hills Books).

Stukeley, W. 1752. *Memoirs of Sir Isaac Newton's Life.* Reeditat în 1936 (Londra: Taylor and Frances).

Summers, D.W. 1995. *Notices of the American Mathematical Society,* 42 (5), 528.

Swerdlow, N. 1998. În Machamer, P., editor. *The Cambridge Companion to Galileo* (Cambridge: Cambridge University Press).

Tabak, J. 2004. *Probability and Statistics: The Science of Uncertainty* (New York: Facts on File).

Tait, P.G. 1898. În *Scientific Papers of Peter Guthrie Tait,* vol. 1 (Cambridge: Cambridge University Press).

Tait, W.W. 1996. În Hart, W.D. *The Philosophy of Mathematics* (Oxford: Oxford University Press).

Tegmark, M. 2004. În Barrow, J.D., Davies, P.C.W. şi Harper, C.L. Jr., editori *Science and Ultimate Reality* (Cambridge: Cambridge University Press).

← . 2007 a. „Shut Up and Calculate", arXiv 0709.4024 [hep-th].

← . 2007 b. „The Mathematical Universe", arXiv 0704.0646 [gr-qc].

Tennant, N. 1997. *The Taming of the True* (Oxford: Oxford University

Press).

Teon din Smirna cca. 130 d.Hr. *Mathematics, Useful for Understanding Plato.* Traducere de R. Lawlor şi D. Lawlor, 1979 (San Diego: Wizards Bookshelf).

Tiles, M. 1996. În Bunin, N şi Tsui-James, E.P., editori. *The Blackwell Companion to Philosophy* (Oxford: Blackwell Publishing).

Todhunter, I. 1865. *A History of the Mathematical*

Theory of Probability (Cambridge: Macmillan and Co.).

Toffler, A. 1970. *Future Shock* (New York: Random House).

Trudeau, R.J. 1987. *The Non-Euclidean Revolution* (Boston: Birkhauser).

Truesdell, C. 1960. *The Rotaţional Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638 – 1788, Leonhardi Euler Opera Omnia,* ser. II, vol. 11, partea a doua (Zürich: Orell Füssli).

Turnbull, H.W., Scott, J.F., Hall, A.R. şi Tilling, L., editori. 1959 – 77. *The Correspondence of Isaac Newton* (Cambridge: Cambridge University Press).

Urquhart, A. 2003. În Griffin, N., editor. *The Cambridge Companion to Bertrand Russell* (Cambridge: Cambridge University Press).

Vafa, C. 2000. În Arnold, V., Atiyah, M., Lax, P. şi Mazur, B., editori. *Mathematics: Frontiers and Perspectives* (Providence, R.I.: American Mathematical Society).

Van der Waerden, B.L. 1983. *Geometry and Algebra în Ancient Civilizations* (Berlin: Springer-Verlag).

Van Heijenoort, J., editor 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book în Mathematical Logic* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Van Helden, A. 1996. *Proceedings of the American Philosophical Society,* 140, 358.

Van Helden, A. şi Burr, E. 1995. The Galileo Project, http://galileo. rice.edu/index.html

Van Stegt, W.P. 1998. În Mancosu, P., editor *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920 s* (Oxford: Oxford University Press).

Vandermonde, A.T. 1771. *L'Histoire de l'Académie des Sciences avec les Mémoires* (Paris: Mémoires de l'Académie Royale des Sciences).

Varley, R., Klessinger, N., Romanowski, C. şi Siegal, M. 2005. *Proceedings of the National Academy of Sciences* (USA), 102, 3519.

Vawter, B. 1972. *Biblical Inspiration* (Philadelphia: Westminster).

Vilenkin, A. 2006. *Many Worlds în One: The Search for Other Universes* (New York: Hill and Wang).

Vitruviu, M.P. secolul I î.Hr. *De Architectura.* În Rowland, I.D. şi Howe, T.N., editori. 1999. *Ten Books on Architecture* (Cambridge: Cambridge University Press).

Vlastos, G. 1975. *Plato's Universe* (Seattle: University of Washington Press).

Von Gebler, K. 1879. *Galileo Galilei and the Roman Curia.* Traducere de J. Struge. Reeditată în 1977 (Merrick, N. Y.: Richwood Publishing Company).

Vrooman, J.R. 1970. *René Descartes: A Biography* (New York: Putnam).

Waismann, F. 1979. *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle; Conversations Recorded by Friedrich Waismann.* Editată de B. McGuinness; traducere de J. Schulte şi B. McGuinness (Oxford: Basel Blackwell).

Wallace, D.F. 2003. *Everything and More: A Compact History of Infinity* (New York: W.W. Norton).

Wallechinsky, D. şi Wallace, I. 1975 – 81. „Biography of Scottish Child Prodigy Marjory Flemming, part 1". http://www.trivia-library.com/b/ biography-of-scottish-child-prodigy-marjory-fleming-part-l.htm

Wallis, J. 1685. *Treatise of Algebra.* Citat în Manning, H.P. 1914. *Geometry of Four Dimensions* (Londra: Macmillan).

Wang, H. 1996. *A Logical Journey: From Godel to Philosophy* (Cambridge, Mass.: MIT Press).

Washington, G. 1788. Scrisoare către Nicholas Pike, 20 iunie, 1788. În Fitzpatrick, J.C. editor. 1931 – 44. *Writings of George Washington* (Washington, D.C.: Government Printing Office). Citat în Deutsch, K.L. şi Nicgorski, W., editori 1994. *Leo Strauss: Political Philosopher and Jewish Thinker* (Lanham, Md.: Rowman & Littlefield).

Wasserman, S.A. şi Cozzarelli, N.R. 1986. *Science,* 232, 951.

Watson, R. 2002. *Cogito, Ergo Sum: The Life of René Descartes* (Boston: David R. Godine).

Weinberg, S. 1993. *Dreams of a Final Theory* (New York: Pantheon Books).

Wells, D. 1986, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers* (Londra: Penguin). Ediţie revizuită 1997.

Westfall, R.S. 1983. *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton* (Cambridge: Cambridge University Press).

Whiston, W. 1753. *Memoirs of the Life and Writings of Mr. William Whiston, Containing, Memoirs of Several of His Friends Also,* ediţia a doua (Londra: Tipărit pentru J. Whiston şi B. White).

White, L.A. 1947. *Philosophy of Science,* 14 (4), 289.

White, N.P. 1992. În Kraut, R., editor *The Cambridge Companion to Plato* (Cambridge: Cambridge University Press).

Whitehead, A.N. 1911. *An Introduction to Mathematics* (Londra: Williams & Norgate). Reeditat 1992 (Oxford: Oxford University Press).

← . 1929. *Process and Reality: An Essay în Cosmology.* Reeditat în 1978 de D.R. Griffin şi D.W. Sherburne (New York: Free Press).

Whitehead, A.N. şi Russell, B. 1910. *Principia Mathematica* (Cambridge: Cambridge University Press). Ediţia a doua 1927.

Wigner, E.P. 1960. *Communications in Pure and Applied Mathematics,* vol. 13, nr. 1. Reeditat în Saatz, T.L. şi Weyl, F.J., editori 1969. *The Spirit and the Uses of the Mathematical Sciences* (New York: McGraw Hill).

Wilczek, F. 2006. *Physics Today,* 59 (noiembrie), 8.

← . 2007. *Physics Today,* 60 (mai), 8.

Witten, E. 1989. *Communications in Mathematical Physics,* 121, 351.

Wolfram, S. 2002. *A New Kind of Science* (Champaign, 111.: Wolfram Media).

Wolterstorff, N. 1999. În Sorell, T., editor *Descartes* (Dartmouth: Ashgate).

Woodin, W.H. 2001 a. *Notices of the American Mathematical Society,* 48 (6), 567.

← . 2001 b. *Notices of the American Mathematical Society,* 48 (7), 681.

Wright, C. 1997. În Heck, R., editor *Language, Thought, and Logic: Essays în Honour of Michael Dummett,* (Oxford: Oxford University Press).

Zalta, E.N. 2005. „Gottlob Frege". *Stanford Encyclopedia of Philosophy,* http.7/plato. stanford.edu/entries/Frege/

← . 2007. „Frege's Logic, Thoerem, and Foundations for Arithmetic". *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato. stanford.edu/entries/ frege-logic/

Zweibach, B.A. 2004. *A First Course în Strâng Theory* (Cambridge: Cambridge University Press).

Credite fotografice

Autorul şi editorul îşi exprimă gratitudinea pentru permisiunea de a reproduce materiale următoarelor persoane şi instituţii:

Ilustraţii

Figurile 1, 2, 6, 14, 15, 17, 19, 24, 25, 54, 55, 56, 60, 61: Ann Feild.

Figurile 3, 28, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 46, 62, 63, 64, 65: Krista Wildt.

Figura 4: e Scott Adams/Dist. United Feature Syndicate, Inc.

Figurile 7, 10, 11, 16, 21, 26, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53: Biblioteca Speciale di Matematica „Giuseppe Peano" cu sprijinul Laurei Garbolino.

Figurile 8, 27: autorul.

Figura 9: Bibliothèque nationale de France, departament de la reproduction.

Figura 12: Will Noel şi Archimedes Palimpsest Project.

Figura 13: Roger L. Easton.

Figurile 18, 20: Colecţie particulară dr. Elliott Hinkes. Prin amabilitatea Bibliotecii Milton S. Eisenhower, Universitatea John's Hopkins.

Figura 22: Roger-Viollet, Paris, Franţa.
Figura 23: Sofie Livio.
Figura 29: Biblioteca Universităţii din Chicago, Joseph H. Schaffner.
Figurile 30, 32: Biblioteca Milton S. Eisenhower, Universitatea John’s Hopkins.
Figura 38: Biblioteca Academiei de Ştiinţe din Torino, prin amabilitatea Laurei Garbolino.
Figura 58: Stacey Benn.
Figura 59: Steven Wasserman.
Cuprins
Prefaţă 7
Capitolul 1
Misterul 11
Capitolul 2
Misticii: Numerologul şi filosoful 25
Capitolul 3
Magicienii: Maestrul şi ereticul 53
Capitolul 4
Magicienii: Scepticul şi uriaşul 99
Capitolul 5
Statisticienii şi probabiliştii: Ştiinţa incertitudinii 134
Capitolul 6
Geometrii: Şocul viitorului 168
Capitolul 7
Logicienii: Reflecţie asupra raţionamentului 191
Capitolul 8
Eficacitate imprevizibilă? 224
Capitolul 9
Despre mintea umană, matematică şi univers 248
Note 279
Bibliografie 299
Credite fotografice